Globale Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Wintersemester 2018 **Dr. Marcel Schmidt**

Blatt 5 **Abgabe: 19.11.2018**

(1) Berechnen Sie den geodätischen Abstand der folgenden offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, ausgestattet mit der von $\mathbb{R}^2$ geerbten riemannschen Metrik.

(a) Eine konvexe offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

(b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid a \leq x \leq b\}$, wobei $a < b$.

(c) $\mathbb{R}^2 \setminus B_r(0)$, $r \geq 0$.

(2) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit. Beweisen Sie, dass für alle $p \in S$ die Abbildung

$$\{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ glatt mit } \gamma(0) = p \text{ und } \gamma((-\varepsilon,\varepsilon)) \subseteq S\} \to T_pS$$

$$\gamma \mapsto \dot{\gamma}(0)$$

surjektiv ist.

Erinnerung: Wir identifizieren T_pS mit dem Bild von T_pS unter der Abbildung $T_pS \to T_pM$, $\xi \mapsto (C^\infty(M) \to \mathbb{R},\, f \mapsto \xi(f|_S))$, siehe Vorlesung.

(3) Es sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ (siehe Serie 2). Es sei $p \in M$, $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in W$ und $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen. Weiterhin seien $g : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ und $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ reguläre Funktionen und $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Permutation, sodass

$$M \cap W = \{x \in W \mid g(x) = 0\} = P\{(x, f(x)) \mid x \in U\}.$$

Nach Serie 2 existieren für jedes p solche Umgebungen und Funktionen.

In jedem Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ identifizieren wir $T_p\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n$ mittels der globalen Karte $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$. Beweisen Sie, dass in diesem Sinne gilt

$$T_pM = \ker Dg(p) = P\mathrm{Bild}DF(p_0).$$

Dabei ist Dg die übliche Ableitung von g, $F : U \to \mathbb{R}^n, F(x) = (x, f(x))$ und $p_0 \in U$ so gewählt, dass $p = PF(p_0) = P(p_0, f(p_0))$.

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 3.

Bemerkung: Die Gleichung $T_pM = \ker Dg(p) = P\mathrm{Bild}DF(p_0)$ ist die linearisierte Version von $M \cap W = \ker g = P\mathrm{Bild}F$.