Wintersemester 2015/16 **Prof. Dr. D. Lenz**

Höhere Analysis II

Blatt 1 **Zur Besprechung in der Übung am 3.11.2015**

(1) Sei E ein Banachraum und $S\colon E \longrightarrow E$ ein beschränkter linearer Operator. Zeigen Sie:

(a) Konvergiert $(\sum_{k=0}^{n} S^k)_n$ in der Operatornorm, so ist $\mathrm{id} - S$ invertierbar und es gilt

$$(\mathrm{id} - S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} S^k.$$

(b) Ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Reihe ist

$$\limsup_{n\to\infty} \|S^n\|^{\frac{1}{n}} < 1.$$

(2) Sei $g \in C([0,1])$. Zeigen Sie, dass es genau ein $f_g \in C([0,1])$ gibt, sodass

$$f(s) - \int_0^1 2st f(t)\, dt = g(s)$$

für alle $s \in [0,1]$ gilt. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g \mapsto f_g$ stetig bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ist. Berechnen Sie f_g für $g = \sin(\pi\cdot)$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1.

(3) Es sei der Volterra-Integraloperator $T\colon C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ gegeben durch

$$Tf(s) = \int_0^s f(t)\, dt, \quad s \in [0,1].$$

Bestimmen Sie den Spektralradius und das Spektrum von T und zeigen Sie, dass 0 kein Eigenwert von T ist.

(4) Sei E ein Banachraum und $A, B\colon E \longrightarrow E$ beschränkte lineare Operatoren. Zeigen Sie, dass $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$ gilt.

Hinweis: Drücken Sie zunächst für $|\lambda| > \|A\|\|B\|$ die Resolvente $(\lambda - BA)^{-1}$ durch $(\lambda - AB)^{-1}$ aus (verwenden sie Aufgabe (1)). Zeigen Sie dann, dass dieser Ausdruck für alle $\lambda \in \rho(AB) \setminus \{0\}$ ein Inverses von $\lambda - BA$ liefert.