Analysis III

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Weihnachtsblatt **Abgabe Montag 4.1.2009**

(1) Gegeben sei die von $f : D(f) = [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 1/t$ erzeugte Rotationsfläche

$$F_f \quad = \quad \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in D(f),\ x_2^2 + x_3^2 = f(x_1)^2\}.$$

Berechnen Sie die Oberfläche von F_f und das eingeschlossene Volumen, d.h. das Volumen von

$$K_f \quad = \quad \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in D(f),\ x_2^2 + x_3^2 \leq f(x_1)^2\}.$$

(Füllt man die Fläche mit Farbe, so reicht diese nicht aus um die Oberfläche damit anzustreichen. Äußern Sie Erstaunen.)

(2) Gegeben ist ein leckerer Donut mit der Parametrisierung

$$\Phi : [0,r_0] \times D \to \mathbb{R}^3, (r,\phi,\theta) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ (R + r\cos\phi)\sin\theta \\ r\sin\phi \end{pmatrix},$$

wobei $0 < r_0 < R$ fest gewählt und D ein frei wählbarer achsenparalleler Würfel im $\mathbb{R}^2$ mit Seitenlänge 2π ist, der $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ enthält. Teilen Sie den Donut in zwei Teile, indem Sie D auswählen und den Parameterbereich $[0,r_0] \times D$ achsenparallel halbieren.

a.) Welche Teilungsstrategie erhält den Weihnachtsfrieden, d.h. führt auf Anteile gleichen Volumens?

b.) Welches ist die 'unfairste' Teilungsstrategie?

(3) a.) Seien $g,h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (g(x),h(y))$ ein Gradientenfeld ist.

b.) Sei $G : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \left(e^{-\frac{1}{|x|^2}}, e^{-\frac{1}{|y|^2}}\right)$. Untersuchen Sie, ob das Vektorfeld G ein Gradientenfeld ist.

(4) Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (0, -ze^z, y^2)$ und für $\delta > 0$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ die geschlossenene Kurve $\gamma_{\delta,\alpha}$ mit

$$\gamma_{\delta,\alpha} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\delta \cos t \cos \alpha, \delta \sin t, \delta \cos t \sin \alpha)$$

gegeben. Die Kurve $\gamma_{\delta,\alpha}$ beschreibt den Rand $K_{\delta,\alpha}$ einer Kreisscheibe vom Radius δ mit Mittelpunkt im Ursprung, welche um die y-Achse um den Winkel α gedreht ist.

a.) Berechnen Sie rot F.

b.) Bestimmen Sie $\lim\limits_{\delta\to 0} \frac{1}{\pi\delta^2} \int F d\gamma_{\delta,\alpha}$ und das Supremum des Grenzwertes über alle Winkel α.

c.) Beweisen Sie nun, dass für alle stetig differenzierbaren Vektorfelder G, deren Rotation in der x-z-Ebene liegt, (d.h. $\langle \operatorname{rot} G, (0, 1, 0)^T \rangle = 0$) gilt

$$|\operatorname{rot} G(0, 0, 0)| = \sup_{\alpha\in[0,2\pi]} \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\pi\delta^2} \int G d\gamma_{\delta,\alpha}.$$

(*Hinweis:* Tatsächlich gilt so eine Relation für alle stetig differenzierbaren Vektorfelder - dann wird das Supremum über alle Raumrichtungen genommen.)

(5) a.) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $G : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, $(r, \phi) \mapsto g(r \cos \phi, r \sin \phi)$. Zeigen Sie, dass für $(r, \phi) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$

$$(\Delta g)(r \cos \phi, r \sin \phi) \;=\; \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}(r, \phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r}(r, \phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2}(r, \phi)\ .$$

Hinweis: Bringen Sie die linke Seite in eine Form, so dass Sie die Kettenregel anwenden können.

b.) Berechnen Sie zu $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{|x|}\right) & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0 & \text{wenn } x = 0, \end{cases}$$

die Funktion Δh auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit Hilfe der Darstellung in Polarkoordinaten. Untersuchen Sie, ob die Funktion h in 0 zweimal stetig differenzierbar ist und berechnen Sie gegebenenfalls Δh an der Stelle 0.

c.) Für welche $x \in \mathbb{R}^2$ verschwindet $\Delta h(x)$?

(6) Welche der folgenden Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$ sind Gradientenfelder? Bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential.

a.) $F(x, y, z) \;=\; (x + z,\ -y - z,\ x - y)$.

b.) $G(x, y, z) \;=\; \big(yz,\ z(x - 2y),\ y(x - y)\big)$.

(7) Gegeben sei für $h > 0$ die von $g : D(g) = [0, h] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^2$, erzeugte Rotationsfläche F_g (s.h. Formel Aufgabe (1)).

a.) Berechnen Sie den Flächeninhalt $A(h)$ der Rotationsfläche. Bestimmen Sie den Grenzwert des Verhältnisses $A(h)/\pi h^4$ für $h \to \infty$, (πh^4 ist die Fläche der Öffnung).

b.) Berechnen Sie den Schwerpunkt $S(h)$ der Fläche (bei konstanter Massenverteilung) und den Grenzwert des Verhältnisses $S(h)/h$ für $h \to 0$ und $h \to \infty$.
Hinweis: Der Schwerpunkt ist $S(h) = (S_1(h), 0, 0)$ mit

$$S_1(h) = \frac{1}{A(h)} \int_{F_g} x_1 \, d\sigma(x).$$

(8) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n + 1) > f(f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f(n) = n$ für $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Es gilt $f(k) > n$ für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k > n$. (Warum?)

Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr!