Höhere Analysis I

Sommersemester 2015 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 7 **Abgabe Dienstag 09.06.2015**

(1) Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale Teilraum eines Hilbertraumes abgeschlossen ist.

(2) Zeigen Sie, dass das orthogonale Komplement einer beliebigen Menge in einem Vektorraum mit Skalarprodukt ein abgeschlossener Unterraum ist.

(3) Es sei H ein Hilbertraum und $U, V \subseteq H$ abgeschlossene Unterräume. Weiterhin seien P_U, P_V die zugehörigen Orthogonalprojektionen. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Es gilt $P_U P_V = 0$ genau dann, wenn $U \perp V$.

(b) Es ist $P_U + P_V$ eine Orthogonalprojektion genau dann, wenn $P_U P_V = 0$.

(c) Es ist $P_U P_V$ eine Orthogonalprojektion genau dann, wenn $P_U P_V = P_V P_U$.

(d) Es gilt $P_U P_V = P_V$ genau dann, wenn $V \subseteq U$.

(e) Es ist $P_U - P_V$ eine Orthogonalprojektion genau dann, wenn $V \subseteq U$.

(f) Es gilt $P_U P_V = P_V$ genau dann, wenn für alle $x \in H$ die Ungleichung $\|P_V x\| \leq \|P_U x\|$ gilt.

(4) Es sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in dem Hilbertraum H mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass (e_n) schwach gegen Null konvergiert (also für alle $x \in H$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x, e_n \rangle = 0$).

(b) Zeigen Sie, dass (e_n) nicht in Norm gegen 0 konvergiert.

Zusatz

Gegeben sei ein Hilbertraum H mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ ein Orthonormalsystem in H für eine gegebenene Indexmenge I, dann gilt

$$\|e_\alpha - e_\beta\| = 2, \qquad \alpha \neq \beta.$$

(b) Gibt es eine abzählbare Orthonormalbasis von H, so gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge von H.

(c) Falls H eine Orthonormalbasis $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ mit überabzählbarer Indexmenge besitzt, dann gibt es keine abzählbare Orthonormalbasis für H.