Analysis I

Wintersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 9 **Abgabe 13.01.2011**

(1) Skizzieren Sie die folgenden Mengen komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| - \bar{z} = 1 + 2i\}$,
(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| = |z - 3 - 5i|\}$,
(c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |z - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}\}$.

(2) Berechnen Sie die folgenden Summen:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$, (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-7)^k}{9^k}$, (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+2}}{3^{k-1}}$.

Hinweis zu (a): Es gilt $\frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{A}{3k-1} + \frac{B}{3k+2}$ für geeignete (welche?) A und B.

(3) Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n\geq 1} x_n$ auf Konvergenz, wenn x_n gegeben ist durch

(a) $x_n = \frac{1}{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, (b) $x_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,
(c) $x_n = \frac{n!}{n^n}$, (d) $x_n = \frac{n^4}{3^n}$, (e) $x_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1}$.

(4) Sei (d_k) eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} d_k = \infty.$$

Was kann über die Konvergenz der folgenden Reihen gefolgert werden?

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{1+d_n}$, (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{1+nd_n}$,
(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{1+n^2 d_n}$, (d) $\sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{1+d_n^2}$.

Zusatzaufgabe:
Seien (a_n), (b_n) Folgen nicht negativer reeller Zahlen, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

(a) Was können Sie über die Konvergenz/Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$ sagen?

(b) Was können Sie sagen, wenn man zusätzlich annimmt, dass (a_n), (b_n) monoton fallend sind?