Analysis II

Wintersemester 2015/16 **Marcel Schmidt**

Blatt 4 **Abgabe Mittwoch 18.11.2015**

(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktionen $|f|$, $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ stetig sind.

(2) Für $n, m \in \{0, 1, \dots, L\}$ seien $a_{n,m} \in \mathbb{R}$ gegeben. Ferner sei der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit Ihrer Lieblingsnorm ausgestattet. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto P(x, y) := \sum_{k=0}^{L} \sum_{\substack{n,m=0 \\ n+m=k}}^{L} a_{n,m} x^n y^m$$

stetig ist.

(3) Seien $(X_1, d_1), \dots, (X_N, d_N)$ metrische Räume. Auf $X = X_1 \times \dots \times X_N$ sei die Metrik d gegeben durch $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + \dots + d_N(x_N, y_N)$, $x, y \in X$.

(a) Zeigen Sie, dass (X, d) genau dann vollständig ist, falls $(X_1, d_1), \dots, (X_N, d_N)$ vollständig sind.

(b) Sei (Z, e) ein metrischer Raum und

$$f : Z \to X, \; z \mapsto (f_1(z), \dots, f_N(z)).$$

Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, falls $f_1, \dots, f_N$ stetig sind.

(4) Sei $X \neq \emptyset$ mit der diskreten Metrik $d_D(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

ausgestattet. Zeigen Sie, dass eine Menge $K \subseteq X$ genau dann kompakt ist, wenn sie endlich ist.

Viel Erfolg!