Analysis II für Physiker

Sommersemester 2009 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 3 **Abgabe Mittwoch 06.05.2009**

(1) Sei $I \subset \mathbb{R}^d$ ein kompaktes Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass der Graph von f gegeben durch $\{(x, f(x)) \in I \times \mathbb{R} \mid x \in I\}$ eine Jordan-Nullmenge ist.

(2) Berechnen Sie für $k \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ die Integrale

$$J_k(t) := \int_0^1 x^t (\ln x)^k dx.$$

Tipp: Berechnen Sie zunächst $\frac{\partial^k}{\partial t^k} g$ für $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto x^t$ und $k \in \mathbb{N}$.

(3) Man berechne das Volumen des Simplex K definiert durch

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ \mid x + y + z \leq 1\}.$$

(4) Sei $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ eine positive, stetige Funktion und $M \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [-1, 1],\ x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}.$$

Skizzieren Sie den Graph von f und M für ein f Ihrer Wahl. Zeigen Sie

$$|M| := \int_M 1 = \pi \int_{-1}^{1} f^2(z) dz.$$

Tipp: Es gilt

$$M = \{(x, y, z) \mid z \in [-1, 1],\ -f(z) \leq y \leq f(z),\ -\sqrt{f(z)^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{f(z)^2 - y^2}\}.$$

b.w.

Zusatzaufgaben

(1) Sei $S(a,b) := \{a + t(b-a) \mid t \in [0,1]\}$ die Gerade, welche die Punkte $a, b \in \mathbb{R}^2$ verbindet. Für $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sei weiterhin

$$D(x_1,x_2) := S\left((x_1,x_2), \left(x_1, \frac{x_2}{2}\right)\right) \cup S\left(\left(x_1, \frac{x_2}{2}\right), \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}\right)\right)$$

und

$$D := \bigcup_{n=0}^{\infty} D(2^{-n}, 2^{-n})$$

(a) Skizzieren Sie D.

(b) Handelt es sich bei D um eine Jordan-Nullmenge?

(2) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und Jordan-messbar, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Man beweise

$$\int_{A\times B} f(x)g(y)d(x,y) = \left(\int_A f(x)dx\right)\left(\int_B g(y)dy\right).$$

(3) Sei $C_0 = [0,1]$. Die Definition von C_n ist induktiv. Sei also C_{n-1}, $n \geq 1$ als Vereinigung von 2^{n-1} disjunkten, kongruenten, abgeschlossenen Intervallen $I_{n-1,k}$, $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$ gegeben. Dann ist C_n definiert als Vereinigung der 2^n disjunkten, kongruenten, abgeschlossenen Intervalle $I_{n,j}$, $j = 0, \ldots, 2^n$, die übrig bleiben, wenn man aus den Intervallen $I_{n-1,k}$ von C_{n-1} ein jeweils zum Mittelpunkt gelegenes offenes Intervall der Länge 3^{-n} entfernt.
Die Menge $C := \bigcap_{n\geq 0} C_n$ heißt Cantormenge. Skizzieren Sie die Mengen C_n für $n = 0, \ldots, 3$. Zeigen Sie weiterhin, dass C überabzählbar und eine Jordan-Nullmenge ist.