Analysis II für Physiker

Sommersemester 2009 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 4 **Abgabe Mittwoch 13.05.2009**

(1) a.) Berechnen Sie $I = \int_K (x^2+y^2)dx\,dy\,dz$, wobei K eine Kugel mit Radius R um den Ursprung ist. Wählen Sie dabei geeignete Koordinaten.[1] I ist das Trägheitsmoment der Kugel bezüglich Rotation um die Z-Achse unter Einheitsmassenbelegung. Geben Sie I in Abhängigkeit von R und der Masse der Kugel $M = \frac{4}{3}\pi R^3$ an.

b.) Berechnen Sie $J = \int_Z (x^2+y^2)dx\,dy\,dz$ für

$$Z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; -R \leq z \leq R,\; x^2+y^2 \leq \cos^2 \frac{\pi z}{R}\right\}.$$

Geben Sie wieder das Trägheitsmoment J in Abhängigkeit von der Masse $M = \pi R$ an.

Hinweis: $\int_0^\pi \cos^4 t dt = \frac{3}{8}\pi$.

(2) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante für die beiden Koordinatentransformationen Φ und Ψ, gegeben durch:

$$\begin{aligned} \Phi &: [0,2\pi]\times[0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3 & \Psi &: [0,2\pi]\times[0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3 \\ (\phi,r,z) &\mapsto (r\cdot\cos\phi, r\cdot\sin\phi, z) & (\phi,r,z) &\mapsto (r\cdot\sin\phi - z, r\cdot\cos\phi, z). \end{aligned}$$

Hinweis: Beachten Sie auch die Zeichnung unten.

(3) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reell-symmetrische Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$. Sei $(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ das euklidische Skalarprodukt. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}(x,Ax)\right) dx.$$

Hinweis: Es gibt eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit UAU^* =diag$(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

b. w.

[1]Hinweis: Kugelkoordinaten, wie Wikipedia vorschlägt, sind *nicht* die vorteilshaftesten Koordinaten.

(4) Entscheiden Sie ob die folgenden Integrale existieren und berechnen Sie sie gegebenfalls:

$$\text{a.)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy, \qquad \text{b.)} \int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\, dydx.$$

Hinweis zu (b): Wie kann man über die zugrundeliegende Fläche noch integrieren?

Zusatzaufgaben

(1) Berechnen Sie das Volumen (=Masse) der Zitrone Z aus Aufgabe 1.

(2) Beweisen Sie die Guldinische Regel: Für das Volumen $V = |K|$ eines Rotationskörpers $K \subset \mathbb{R}^3$, der durch Rotation einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} = \{(r,z) \ : \ r > 0 \ \}$ um die Achse $r = 0$ entsteht, gilt:

$$V = 2\pi R|A|, \qquad \text{mit } R \text{ Abstand des Schwerpunkts zur Rotationsachse.}$$

(Hinweis: $V = \{(r\cos\phi, r\sin\phi, z) \ : \ (r, z \in A), 0 \leq \phi \leq 2\pi\})$.

(3) Berechnen Sie zu gegebener affiner Transformation $x \mapsto Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass $\det(A) \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}^n$ die Funktionaldeterminante. Geben Sie das Integral $\int_{K'} f$ mit $K' = \{Ax + b \ : \ x \in \mathbb{R}^n, \ \ |x| \leq 1 \ \}$ in Abhängigkeit des Integrals von f über die Einheitskugel an.

b. w.

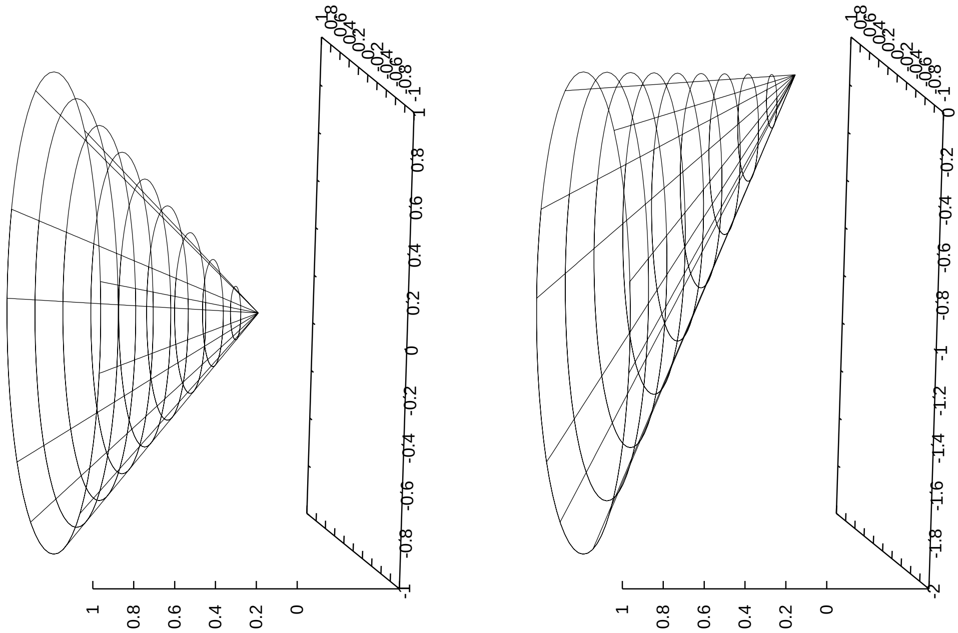

Abbildung 1: Zu Aufgabe 2.: Die Bilder von $[0, 2\pi] \times \{1\} \times [0, 1]$ unter Φ und Ψ.