

---

## Analysis II für Physiker

Sommersemester 2009

Prof. Dr. D. Lenz

---

Blatt 8

Abgabe Mittwoch 17.06.2009

- (1) Zeigen Sie, dass man für genügend nahe bei 1 liegende Punkte  $x, y, z$  das Gleichungssystem

$$-2x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad x^2 + e^{y-1} - 2z = 0$$

durch Funktionen  $y = \phi(x)$ ,  $z = \psi(x)$  lösen kann.

- (2) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$z(x, y) = ax^2 + by^2, \quad a, b > 0$$

auf dem Quadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

- (3) Bestimmen Sie die Extrema der Funktionen  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , bzw.  $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  unter den angegebenen Nebenbedingungen  $g = 0$  bzw.  $h_1 = 0$  und  $h_2 = 0$

(a)  $f_1(x, y) = xy^2$ ,  $g(x, y) = x + y - 1$ ,

(b)  $f_2(x, y, z) = 5x + y - 3z$ ,  $h_1(x, y, z) = x + y + z$ ,  $h_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ .

- (4) Man bestimme den in die Einheitskugel in  $\mathbb{R}^m$  eingeschriebenen, achsenparallelen Quader größten Volumens.

### Zusatzaufgaben

- (1) Geben Sie eine Parametrisierung des Paraboloidstückes aus Aufgabe (2) und bestimmen Sie den Tangentialraum  $T_p M$  und die Tangentialebene  $p + T_p M$  im Punkt  $p = (x, y, z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{a+b}{4})$ .
- (2) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt desjenigen Teils des Paraboloiden  $z = x^2 + y^2$ , der zwischen den Ebenen  $z = 0$  und  $z = 4$  liegt.

- (3) Die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig differenzierbar und nichtnegativ. Man zeige, dass der Flächeninhalt der von  $f$  erzeugten Rotationsfläche

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ f(u) \cos v \\ f(u) \sin v \end{pmatrix}$$

für  $a \leq u \leq b$  und  $0 \leq v \leq 2\pi$ , durch

$$2\pi \int_a^b f(u) \sqrt{1 + (f'(u))^2} du$$

gegeben ist.