Wintersemester 2015/16 **Prof. Dr. D. Lenz**

Höhere Analysis II

Blatt 8 **Zur Besprechung in der Übung am 12.01.2016**

(1) Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum (d.h. ein Hausdorffraum, in dem jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat). Sei $x \in X$ beliebig und U eine Umgebung von x.

Zeigen Sie, dass eine kompakte Umgebung V von x mit $V \subset U$ existiert.

(2) Sei K ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie, dass K das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, d.h., es existiert eine Folge (U_i) offener Mengen, sodass für jede offene Menge $U \subset K$ eine Teilfolge (U_{i_k}) mit $U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_{i_k}$ existiert.

(3) Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und $\Lambda\colon C_0(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein positives, lineares Funktional. Zeigen Sie, dass Λ stetig ist.

(4) Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, in dem eine Folge (K_n) kompakter Mengen existiert mit $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. (Ein solches X heißt auch σ-kompakt.) Weiterhin sei $\Lambda : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein positives, lineares Funktional.

Zeigen Sie, dass ein eindeutiges reguläres Maß μ auf den Borelmengen existiert mit

$$\Lambda(f) = \int f d\mu$$

für alle $f \in C_c(X)$.