Analysis III Wintersemester 2017/2018

Hausaufgabenblatt 1

Abgabe am 24.10.2017

Aufgabe 1. Untersuchen Sie die folgenden Kurven auf Rektifizierbarkeit:

(a) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} t \sin\left(\frac{\pi}{t}\right) & : t > 0, \\ 0 & : t = 0, \end{cases}$

(b) $\varrho : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} t^2 \sin\left(\frac{\pi}{t}\right) & : t > 0, \\ 0 & : t = 0. \end{cases}$

Tipp: Skizzieren Sie die Kurve und geben Sie eine obere bzw. untere Abschätzung für die Kurvenlänge an.

Aufgabe 2. Skizzieren Sie folgende Kurven und berechnen Sie ihre Länge:

(a) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t}),$

(b) $\varrho : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ für $a > 0$.

Aufgabe 3. Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 6x_2 \\ 6x_2 x_3 \\ 6x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2/2 \\ t^3/3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes F und das Kurvenintegral $\int_\gamma F \mathrm{d}\gamma$.

Aufgabe 4. Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ und die Kurve $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(x) = \frac{x}{|x|^3} \quad \text{und} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2\sin(t/2) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes F und das Kurvenintegral $\int_\gamma F \mathrm{d}\gamma$.