

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsserie 4

Abgabe am 13.06.2019 vor der Vorlesung

Aufgabe 1**4 Punkte**

Geben Sie eine Lösung für folgende Anfangswertprobleme an:

- a) $y' = -\frac{2y}{x} + 4x$ mit $y(1) = 1$.
- b) $y' = 1 + x - y$ mit $y(0) = 1$.

Aufgabe 2**4 Punkte**

Geben Sie eine Lösung für folgende Anfangswertprobleme an:

- a) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ mit $y(1) = 1$.
- b) $y' = \frac{y}{x} + \exp(-\frac{y}{x})$ mit $y(1) = 0$.

Aufgabe 3**4 Punkte**

Geben Sie eine Lösung für folgende Anfangswertprobleme an:

- a) $y' = e^{x+y} - 1$ mit $y(0) = 1$.
- b) $y' = (x + y - 4)^2$ mit $y(\pi) = 4 - \pi$.

Aufgabe 4**4 Punkte**Gegeben sei die Differentialgleichung $f(x, y) \cdot y'(x) - g(x, y) = 0$ mit den Funktionen $f: (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xe^{xy}$ und $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto -ye^{xy}$.

- a) Untersuchen Sie die Differentialgleichung auf Exaktheit.
- b) Finden Sie im Falle der Exaktheit eine Stammfunktion und geben Sie eine lokale Lösung zum Anfangswertproblems $y(1) = 1$ an.

Zusatzaufgabe**4 Punkte**Sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = b \in \mathbb{R}$. Weiterhin sei $a \in (0, \infty)$ gegeben. Zeigen Sie, dass für jede Lösung der Differentialgleichung $y'(x) + a \cdot y(x) = h(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \frac{b}{a}.$$