

Einführung in Dirichletformen - Notizen ¹

Jena - Wintersemester 2016 / 2017

Daniel Lenz

¹Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung, sondern lediglich um Notizen.
Konstruktive Kommentare sind willkommen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0. Motivation	5
Kapitel 1. Selbstadjungierte positive Operatoren	9
1. Der Spektralsatz	9
2. Operatoren und Formen	12
3. Halbgruppen und ihre Erzeuger	20
4. Resolventen	25
5. Der magische Tetraeder oder, wie alles zusammenhaengt	28
Kapitel 2. Markovhalbgruppen und Dirichletformen	31
1. Reelle Operatoren	31
2. Das erste Beurling/Deny Kriterium und die Kato Ungleichung	33
3. Das zweite Beurling/Deny Kriterium, Dirichletformen und Submarkovsche Halbgruppen	36

KAPITEL 0

Motivation

Dirichletformen spielen eine Rolle in verschiedenen Bereichen der Mathematik:

- Mathematische Physik: Waermeleitung, Schroedingergleichung, Elektrostatik.
- Partielle Differentialgleichungen (mit singulaeren Koeffizienten): $\nabla \cdot a(x)\nabla$ mit a unstetig. (Stampackia, De Giorgii, Moser...)
- Wahrscheinlichkeitstheorie: Markovprozesse z.B. Brownsche Bewegung. (Fukushima, ... ,...)
- Intrinsische Geometrie: Waermekernabschaetzungen. (Grigoryan, Sturm, Jost, ...)

Dabei kommt die grundlegende Bedeutung von Dirichletformen daher, dass sie einen analytischen Zugang zu (symmetrischen) Markovprozessen bieten und damit Analysis und Stochastik verbinden. Diese Verbindung wird sichtbar in folgender Formel:

$$e^{-tL} f(x) = \mathbb{E}_x(f(X_t)).$$

Hier ist L der Erzeuger der Dirichletform und f eine Funktion im entsprechenden L^2 -Raum (Details spaeter) und \mathbb{E}_x der Erwartungswert des Markovprozesses bei Start in x und X_t , $t \geq 0$, der eigentliche Markovprozess. Damit stehen also auf der linken Seite *analytische* Groessen und auf der rechten Seite *stochastische* Groessen. Die Verbindung zur Geometrie entsteht - etwas vereinfacht dadurch - dass sowohl Spektraltheorie als auch der Markovprozess durch die Geometrie des zugrundeliegenden Raumes bestimmt sind und damit diese widerspiegeln.

Zur Einstimmung diskutieren wir nun eine Motivation aus der Physik.

Die Waermeleitungsgleichung/Diffusionsgleichung.

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \Delta \psi.$$

Hier: $\psi = \psi(x, t)$ mit $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ und $t > 0$, $\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

Es beschreibt ψ die Waermeverteilung zu der Zeit t , falls zur Zeit $t = 0$ die Anfangsverteilung $\psi(\cdot, 0)$ geherrscht hat. Dabei wird Waerme als ein Stoff aufgefasst.

Herleitung. $\psi = \psi(x, t)$ Waermeverteilung. Also:

$$\text{Waermemenge in Volumen } V \text{ zur Zeit } t = \int_V \psi(x, t) dx.$$

Damit

$$\text{Aenderung der Waermemenge in } V \text{ zur Zeit } t = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \psi(x, t) dx = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) dx.$$

Andererseits (Waerme ist Stoff !):

$$\begin{aligned} \text{Aenderung der Waermemenge in } V \text{ zur Zeit } t &= \text{Abfluss aus } V \\ (n \text{ aussere Normale}) &= - \int_{\partial V} \text{Fluss} \cdot n dS \\ (\text{Fluss linear im u entgegen zu Waermegefuelle}) &= \int_{\partial V} (b(x) \nabla \psi(x, t)) \cdot n dS \\ (\text{Stokes}) &= \int_V (\nabla \cdot (b(x) \nabla \psi(x, t))) dx \\ (b \equiv 1) &= \int_V \Delta \psi(x, t) dx. \end{aligned}$$

Da V beliebig ist, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \Delta \psi.$$

Etwas allgemeiner erhaelt man

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \nabla \cdot b(x) \nabla \psi$$

mit $b(x)$ positiv definite Matrix. oder in 'schwacher' Form:

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \psi \phi dx = - \int (b(x) \nabla \psi, \nabla \phi) dx$$

fuer 'alle' ϕ .

Formale Loesung. Eine Loesung ist gegeben durch $\psi_t = e^{t\Delta} \psi_0$.

Eine diskretisierte Version dieser Gleichungen fuehrt auf ungerichtete gewichtete Graphen. Hierbei besteht ein ungerichteter gewichteter Graph (X, b) aus einer endlichen oder abzaehlbaren Menge X und einer Funktion $b : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ mit folgenden drei Eigenschaften:

- b ist symmetrisch, d.h. es gilt $b(x, y) = b(y, x)$ fuer alle $x, y \in X$,
- b verschwindet auf der Diagonalen, d.h. es gilt $b(x, x) = 0$ fuer alle $x \in X$,
- es ist b lokal summierbar, d.h. es gilt $\sum_{z \in X} b(x, z) < \infty$ fuer alle $x \in X$.

Jeder solche Graph liefert dann einen Operator

$$L_b f(x) := \sum_{y \sim x} b(x, y) (f(x) - f(y)).$$

Diesen Operator kann man aehnlich wie oben schreiben. Dazu fuehrt man die Menge F_0 der Funktionen auf den Vertices und die Menge F_1 der Funktionen g auf den Kanten mit $g(x, y) = -g(y, x)$ ein und definiert die Operatoren

$$d : F_0 \rightarrow F_1, df(e) = f(y) - f(x) \text{ fuer } e = (x, y)$$

und seinen formal adjungierten

$$d^* : F_1 \rightarrow F_0, d^* g(x) = - \sum_{y \sim x} g(x, y)$$

ein. Dann gilt

$$L_b f = d^* bdf.$$

Fragen. In den obigen Kontexten stellen sich bei der Untersuchung der Waermeleitung Fragen nach

- Existenz von Loesungen,
- Eindeutigkeit von Loesungen,
- Eigenschaften der Loesungen,
- Abhaengigkeit der Loesungen von der rechten Seite,
- Abhaengigkeit der Loesungen von der Geometrie...

Wir werden diese Fragen in dieser Vorlesung behandeln. Dabei wird die Vertraeglichkeit mit normalen Kontraktionen eine wesentliche - und auf den ersten Blick nicht erwartbare - Rolle spielen. Das diskutieren wir nun kurz: Eine Abbildung $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst *normale Kontraktion*, wenn gilt

$$T(0) = 0 \quad \text{und} \quad |T(x) - T(y)| \leq |x - y|.$$

Definiert man nun die quadratische Form Q zu obigen Operatoren durch

$$Q(f) := \int_{\Omega} \langle b(x) \nabla f, \nabla f \rangle dx$$

bzw.

$$Q(f) := \frac{1}{2} \sum b(x, y) (f(x) - f(y))^2,$$

so gilt in beiden Faellen

$$Q(Tf) \leq Q(f) \quad (*).$$

Bew. *Auf Ω :* Ohne Einschraenkung f reellwertig, stetig differenzierbar. Ohne Einschraenkung T stetig differenzierbar. Dann Kettenregel: $\nabla(Tf)(x) = T'(f(x)) \nabla f(x)$ mit $T' \leq 1$ da Kontraktion.

Auf Graphen: klar.

Wesentliche strukturelle Eigenschaften der Loesungen von Waermeleitungsgleichung folgen aus (*):

Das soll in diesem Semester untersucht werden. Dazu folgender Plan:

Kapitel 1: Selbstadjungierte positive Operatoren - Magischer Tetraeder: Form, Operator, Halbgruppe, Resolvente \sim Form, Laplace, Waermeleitungsgleichung, Poissongleichung

Kapitel 2: Markovhalbgruppen und Dirichlet Formen: Generator- Dirichletform - Markovhalbgruppe/Resolvente - Markovprozess.

Kapitel 3: Regulare Dirichletformen und Kapazitaet

KAPITEL 1

Selbstadjungierte positive Operatoren

Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum ueber \mathbb{C} . Das Skalarprodukt in \mathcal{H} wird mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet und die Norm mit $\| \cdot \|$.

1. Der Spektralsatz

In diesem Abschnitt diskutieren wir den fundamentalen Satz fuer selbstadjungierte Operatoren. Der Abschnitt ist als Wiederholung gedacht.

Ein linearer Operator T im Hilbertraum \mathcal{H} besteht aus zwei Teilen:

- einem Unterraum, genannt *Definitionsbereich* von T und mit $D(T)$ bezeichnet,
- einer linearen Abbildungsvorschrift $D(T) \rightarrow \mathcal{H}$.

Wir schreiben dann $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$.

Wir werden meist voraussetzen, dass der Operator dicht definiert ist d.h. dass sein Definitionsbereich dicht im Hilbertraum ist.

Ist T ein dicht definierter Operator, so existiert der *adjungierte Operator* T^* gegeben durch

$$D(T^*) := \{ \eta \in \mathcal{H} : \text{es gibt } \rho \in \mathcal{H} \text{ mit } \langle \eta, T\xi \rangle = \langle \rho, \xi \rangle \text{ fuer alle } \xi \in D(T) \}.$$

$$T^* \eta := \rho.$$

Ein Operator heisst *selbstadjungiert*, wenn er gleich seinem adjungierten Operator ist.

Beispiel- Multiplikationsoperator. Sei (X, m) ein Massraum ohne Atome unendlicher Masse und $V : X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Dann wird durch

$$D(M_V) := \{ f \in L^2(X, m) : \int |Vf|^2 dm < \infty \}$$

$$M_V f := Vf,$$

ein linearer Operator auf $L^2(X, m)$ definiert. Der Operator M_V ist dicht definiert, und es gilt $M_V^* = M_{\overline{V}}$ und $D(M_V) = D(M_{\overline{V}}) = D(M_V^*)$. Insbesondere ist M_V genau dann selbstadjungiert, wenn V fast sicher reellwertig ist.

←—————→
Ende der Vorlesung

Das vorangehende Beispiel diskutierte liefert schon den allgemeinsten Fall eines selbstadjungierten Operator. Genauer laesst sich jeder selbstadjungierte

Operator als Multiplikationsoperator darstellen. Fuer Matrizen ist das nichts anderes als die uebliche Diagonalisierung.

THEOREM (Spektralsatz fuer selbstadjungierte Operatoren). *Sei T ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum \mathcal{H} . Dann gibt es einen Massraum (X, m) (ohne Atome unendlicher Masse), eine messbare Funktion $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ und eine unitaere Abbildung*

$$U : L^2(X, m) \rightarrow \mathcal{H} \text{ mit } T = UM_VU^{-1}.$$

Zeichnung: komm. Diagramm.

Bemerkung. (a) Tatsaechlich kann X als diskunkte Vereinigung von Kopien von \mathbb{R} gewaehlt werden, m als Summe von Radonmassen auf diesen Kopien und V als die Identitaet auf de einzelnen Kopien. Die σ -Algebra wird von den kompakten Teilmengen erzeugt.

(b) Ist der Hilbertraum separabel, so ist (X, m) σ -endlich.

(c) Diese Darstellung eines selbstadjungierten Operator als Multiplikationsoperator ist nicht kanonisch.

Beispiel - Laplaceoperator Laplaceoperator auf \mathbb{R}^N ist mittels Fouriertransformation unitaer aequivalent zu Multiplikation mit $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $k \mapsto |k|^2$.

Beispiel - Matrizen. Selbstadjungierte Operatoren im N dimensionalen. Zeichnung: N Kopien von \mathbb{R} , Eigenwerte...

Beispiel - Multiplikationsoperator. Multiplikationsoperatoren auf Massraeumen (ohne Atome unendlicher Masse)

Der Spektralsatz erlaubt es uns insbesondere Funktionen eines selbstadjungieren Operator T zu definieren: Zu messbarem $\Phi : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir $\Phi(T)$ als

$$\Phi(T) := UM_{\Phi \circ V}U^{-1},$$

d.h.

$$D(\Phi(T)) := U\{f \in L^2(X, m) : f \in D(M_{\Phi \circ V})\}, \Phi(T)Uf = UM_{\Phi \circ V}f.$$

Hier wird die naheliegende Definition der Funktion eines Multiplikationsoperatoren auf beliebige selbstadjungierte Operatoren heruebergezogen. Aufgrund der Eigenschaften von Multiplikationsoperatoren folgt dann einfach, dass

$$\Phi(T)^* = \overline{\Phi}(T)$$

und dass $\Phi(T)$ beschaenkt ist, wenn Φ beschaenkt ist. Weiterhin gilt (fuer beschaenkte messbare Φ und Ψ) dann

$$\Phi(T)\Psi(T) = (\Phi\Psi)(T), \Phi(T) + \Psi(T) = (\Phi + \Psi)(T).$$

Die Abbildung $\Phi \mapsto \Phi(T)$ ist also ein Algebrenhomomorphismus (von der Algebra der beschaenkten messbaren Funktionen auf \mathbb{R} in die Algebra der beschaenkten Operatoren).

Tatsaechlich gelten (etwas komplizierter zu formulierende) Varianten fuer beliebige messbare Φ und Ψ .

Insbesondere erhalten wir fuer jede messbare Menge $A \subset \mathbb{R}$ einen Operator $1_A(T)$. Ebenso folgt aus den Eigenschaften von Multiplikationsoperatoren nun leicht folgende Proposition.

PROPOSITION. *Sei T ein selbstadjungierter Operator. Dann ist $1_A(T)$ ein Projektion fuer jedes messbare $A \subset \mathbb{R}$. Die Abbildung*

$$E : \text{Borelmengen in } \mathbb{R} \longrightarrow \text{Projektionen}, E(A) := 1_A(T)$$

ist ein projektionswertiges Mass d.h. es gilt

- *Ist A die disjunkte Vereinigung von Borelmengen A_j , $j \in \mathbb{N}$, so gilt $E(A) = \bigoplus_j E(A_j)$ (also $E(A_j) \perp E(A_k)$ fuer $j \neq k$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n E(A_j)\xi = E(A)\xi$ fuer alle $\xi \in \mathcal{H}$).*
- *$E(\mathbb{R}) = id$, $E(\emptyset) = 0$.*

Fuer den Traeger von E definiert als

$$\text{supp } E := \{\lambda \in \mathbb{R} : E(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq 0 \text{ fuer alle } \varepsilon \neq 0\}$$

gilt $\text{supp } E = \sigma(T)$.

Die Abbildung E aus der vorangehenden Proposition heisst *projektionswertiges Mass* von T . Die Abbildung $t \mapsto E((-\infty, t])$ heisst *Spektralschar*. Das projektionswertige Mass und die Spektralschar sind kanonisch (d.h. unabhangig von der gewaehlten unitaeren Darstellung U).

Durch E und $\xi \in \mathcal{H}$ wird auf \mathbb{R} ein Mass μ_ξ induziert mit

$$\mu_\xi(A) := \langle \xi, E(A)\xi \rangle = \langle E(A)\xi, E(A)\xi \rangle.$$

Es wird als Spektralmass von ξ bzgl T bezeichnet. Das Spektralmass erfuehlt folgende fundamentale Eigenschaft.

PROPOSITION. *Sei $\Phi : \sigma(T) \longrightarrow \mathbb{C}$ messbar. Dann gilt $\int |\Phi|^2 d\mu_\xi < \infty$ genau dann wenn ξ zum Definitionsbereich von $\Phi(T)$ gehoert. In diesem Fall gilt*

$$\|\Phi(T)\xi\|^2 = \int |\Phi|^2 d\mu_\xi(t).$$

Beweis. Fuer Elementarfunktionen $\Phi = \sum_{j=1}^n c_j 1_{A_j}$ zeigt man leicht

$$\int |\Phi \circ V|^2 dm = \int |\Phi|^2 d\mu_\xi.$$

Durch Grenzübergang folgt die Formel dann fuer alle messbaren Φ . Daraus folgen die Aussagen. □

Damit koennen wir nun der Gleichung

$$\Phi(T) = \int \Phi dE$$

in folgender Weise einen Sinn geben: Fuer eine Elementarfunktion $\phi = \sum c_j 1_{A_j}$ definiert man natuerlicherweise

$$\int \phi(t) dE(t) := \sum c_j E(A_j) = \phi(T).$$

Sei nun $\varphi : \text{supp } E \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Sei $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\xi)$. Dann konvergiert (nach der Proposition) fuer jede Folge (φ_n) von Elementarfunktionen, die in $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\xi)$ gegen φ konvergiert, die Folge der

$$\left(\int \varphi_n dE(t)\xi = \varphi_n(T)\xi \right)$$

gegen $\varphi(T)\xi$. Wir definieren entsprechend

$$\int \varphi dE\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dE\xi = \Phi(T)\xi.$$

Beispiel - Matrizen. Ist A eine selbstadjungierte Operator in einem endlichdimensionalen Hilbertraum, so ist A durch eine symmetrische Matrix gegeben. Dann hat A nur reelle Eigenwerte. Zu einem reellen Eigenwert λ sei P_λ die Projektion auf den Eigenraum zu λ . Dann sind Projektionen zu verschiedenen Eigenraeumen orthogonal und es gilt

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda.$$

Beispiel - Multiplikationsoperatoren.

2. Operatoren und Formen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass selbstadjungierte nichtnegative Operatoren nichtnegativen Formen in kanonischer Weise entsprechen.

Wir beginnen mit einer Diskussion davon, was ein nichtnegativer Operator ist.

LEMMA (Charakterisierung Nichtnegativitaet). *Sei T eine selbstadjungierter Operator im Hilbertraum \mathcal{H} . Dann sind aequivalent:*

- (i) $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.
- (ii) *Es gilt $\langle Tf, f \rangle \geq 0$ fuer alle $f \in D(T)$.*
- (iii) *Es existiert ein selbstadjungierter Operator S mit $T = S^2$.*

Beweis. Ohne Einschraenkung koennen wir T als Operator der Multiplikation mit V auf einem Massraum (X, m) (ohne Atome unendlicher Masse) annehmen. Dann ist $\sigma(T)$ der wesentliche Wertebereich von V , und es gilt offenbar

Wes. Wertebereich von $V \subset [0, \infty) \iff \int V|f|^2 dm \geq 0$ fuer alle $f \in D(T)$.

Damit folgt die Aequivalenz von (i) und (ii).

(i) \implies (iii): Wir definieren S als den Operator der Multiplikation mit $V^{1/2}$.

(iii) \implies (ii): Wir koennen ohne Einschraenkung S als Operator der Multiplikation mit einer reellwertigen Funktion W annehmen. Dann ist T der Operator der Multiplikation mit dem (nichtnegativen) W^2 und es folgt (ii).

□

DEFINITION. *Ein selbstadjungierter Operator heisst nichtnegativ, wenn er eine der Bedingungen des vorigen Lemma erfuehlt.*

Fuer nichtnegative selbstadjungiert Operatoren T koenen wir die Wurzel $\sqrt{T} = T^{1/2}$ definieren mittels

$$\sqrt{\cdot} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty), x \mapsto \sqrt{x}$$

(da $\sigma(T) \subset [0, \infty)$). Es ist dann $T^{1/2}$ wieder ein selbstadjungierter nichtnegativer Operator.

Eine nichtnegative Sesquilinearform auf \mathcal{H} besteht aus einem Unterraum D von \mathcal{H} und einer Abbildung $Q : D \times D \longrightarrow \mathbb{C}$, so dass gilt

- $Q(f, g) = \overline{Q(g, f)}$ fuer alle $f, g \in D$.
- Q ist linear im zweiten Argument (und damit ist Q dann aufgrund des ersten Punktes antilinear im ersten Argument).
- $Q(f, f) \geq 0$ fuer alle $f \in D$.

Damit induziert Q eine Abbildung $Q' : \mathcal{H} \longrightarrow [0, \infty]$ definiert durch $Q'(f) := Q(f, f)$ falls $f \in D$ und $Q'(f) = \infty$ sonst.

Aus Q' kann Q wiedergewonnen werden mittels Polarisation. Genauer gilt

$$Q(f, g) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^3 i^k Q'(g + i^k f, g + i^k f).$$

Daher werden wir im folgenden oft nicht mehr zwischen Q und Q' unterscheiden und nur noch die Bezeichnung Q verwenden. Ist Q eine nichtnegative Form, so wird auf D durch

$$\langle f, g \rangle_Q := Q(f, g) + \langle f, g \rangle$$

eine Skalarprodukt eingefuehrt. Die zugehoerige Norm bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_Q$ d.h.

$$\|f\|_Q^2 = Q(f, f) + \langle f, f \rangle.$$

Wir werden meist voraussetzen, dass Q dicht definiert ist, d.h. dass D dicht im Hilbertraum ist.

Beispiel. Sei T ein nichtnegativer Operator im Hilbertraum. Dann wird durch $D(Q_T) := D(T^{1/2})$ und

$$Q_T(f, g) := \langle T^{1/2} f, T^{1/2} g \rangle$$

eine nichtnegative Form definiert.

Nach dem Spektralsatz koennen wir diese Formen auch durch folgendes Beispiel beschreiben:

Beispiel. Sei (X, m) ein Massraum und $V : X \longrightarrow [0, \infty)$ messbar. Dann wird durch

$$D := \{f \in L^2(X, m) : \int V|f|^2 dm < \infty\}$$

$$Q_V(f, g) := \int Vfg dm$$

eine nichtnegative Form definiert. Ist M der Operator der Multiplikation mit V so gilt $D(Q) = D(M^{1/2})$ und $Q_V(f, g) = \langle M^{1/2} f, M^{1/2} g \rangle$.

Der entscheidende Satz zu nichtnegativen Formen ist der folgende. Er impliziert, dass die Formen der Form Q_V bzw. Q_T (in gewisser Weise) schon die allgemeinsten Formen sind.

THEOREM. Sei $Q : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ eine nichtnegative Form auf \mathcal{H} . Dann sind äquivalent:

- (i) Es gibt einen selbstadjungierten nichtnegativen Operator H mit $D = D(H^{1/2})$ und $Q(f, g) = \langle H^{1/2}f, H^{1/2}g \rangle$.
- (ii) Q ist unterhalbstetig (d.h. es gilt $Q(f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} Q(f_n)$ fuer jede Folge (f_n) mit $f_n \rightarrow f$).
- (iii) Der Unterraum D mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ ist ein Hilbertraum (d.h. vollstaendig).

Beweis. (i) \implies (ii): Fuer $n \in \mathbb{N}$ definieren wir Q_n durch

$$Q_n(f) := \langle nH(H+n)^{-1}f, f \rangle = \int \frac{nt}{t+n} d\mu_f(t).$$

Da $\mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{nt}{n+t}$ fuer festes n eine beschraenkte Funktion ist, ist der Operator $nH(H+n)^{-1}$ beschraenkt. Also ist Q_n stetig (in f). Offenbar ist die Folge $Q_n(f)$ monoton und es gilt fuer $n \rightarrow \infty$

$$Q_n(f) = \int \frac{nt}{t+n} d\mu_f(t) \rightarrow \int t \mu_f(t) = \int t^{1/2} t^{1/2} d\mu_f(t) = Q(f).$$

(Beachte: Der Fall $Q(f) = \infty$ ist eingeschlossen, da $Q(f) = \infty \iff f \notin D(Q) = D(H^{1/2}) \iff \int (t^{1/2})^2 d\mu_f(t) = \infty$.) Damit ist also Q das Supremum der stetigen Funktionen Q_n . Damit folgt (i) aus allgemeinen Prinzipien (Uebung).

(ii) \implies (iii): Sei (f_n) eine Cauchy Folge bezgl. des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$. Dann ist insbesondere (f_n) eine Cauchy Folge in \mathcal{H} und hat konvergiert dort gegen ein f . Weiterhin existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit

$$Q(f_n - f_m) + \|f_n - f_m\|^2 \leq \varepsilon$$

fuer alle $n, m \geq N$. Bildet man nun (bei festem $m \geq N$) den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ so folgt aus (ii), dass $f - f_m$ zu $D(Q)$ gehoert und

$$Q(f - f_m) + \|f - f_m\|^2 \leq \varepsilon$$

erfuellt fuer alle $m \geq N$. Damit folgt $f = (f - f_m) + f_m \in D(Q)$ und (f_n) konvergiert bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ gegen f .

(iii) \implies (i):

Idee: Es sollte eigentlich gelten $Q(f, g) = \langle Hf, g \rangle$ also $\langle f, g \rangle_Q = \langle (H+1)f, g \rangle$. Problem: H kann unbeschraenkt sein und diese Formeln haben dann keinen Sinn.

Loesung: Betrachte $A = (H+1)^{-1}$. Dann gilt $\langle f, g \rangle = \langle Af, g \rangle_Q$ und A ist beschraenkt. Aus diesem A kann man dann durch Inversion wieder H gewinnen.

← Ende der Vorlesung →

Hier sind die Details:

Nach (iii) ist $D(Q)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$. Wir bezeichnen diesen Hilbertraum mit \mathcal{H}' . Wir betrachten die Form

$$\langle \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H}' \times \mathcal{H}' \rightarrow \mathbb{C}, (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle.$$

Diese Form ist offenbar sesquilinear und nichtnegativ. Weiterhin erfuehlt sie

$$|\langle \langle f, g \rangle \rangle| \leq \|f\| \|g\| \leq \|f\|_Q \|g\|_Q.$$

Daher (siehe folgende 'Erinnerung' fuer Details) ist diese Form durch einen (durch 1) beschaenkten selbstadjungierten nichtnegativen Operator $A : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'$ gegeben d.h. es gilt

$$\langle f, g \rangle = \langle \langle f, g \rangle \rangle = \langle f, Ag \rangle_Q$$

fuer alle $f \in \mathcal{H}'$.

Nach dem Spektralsatz angewendet auf A existiert dann ein Massraum (X, m') eine messbare Funktion $a : X \rightarrow [0, 1]$ und eine unitaere Abbildung

$$U : \mathcal{H}' \rightarrow L^2(X, m') \text{ mit } H = U^{-1}M_aU.$$

Wegen $0 = \langle Af, f \rangle_Q = \|f\|^2$ nur fuer $f = 0$ gilt m' fast sicher $a > 0$. Damit gibt es ein messbares $h : X \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$a = \frac{1}{h+1}.$$

Damit gilt also fuer alle $f, g \in \mathcal{H}'$

$$\langle f, g \rangle = \langle Af, g \rangle_Q = \int UfUg \frac{1}{h+1} dm'$$

sowie

$$Q(f, g) = \langle f, g \rangle_Q - \langle f, g \rangle = \int UfUg dm' - \int UfUg \frac{1}{h+1} dm' = \int UfUg \frac{h}{h+1} dm'.$$

Fuehrt man auf X das Mass $m := \frac{1}{h+1} dm'$ so ist also

$$D(Q) \subset (\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow L^2(X, m), f \mapsto Uf$$

isometrisch (erste Formel) mit dichtem Bild (Uf sind dicht in $L^2(X, m')$). Diese Abbildung ist weiterhin dicht definiert, da $D(Q)$ dicht im \mathcal{H} ist. Damit koennen wir sie zu einer unitaeren Abbildung fortsetzen:

$$\tilde{U} : \mathcal{H} \rightarrow L^2(X, m).$$

Wir koennen also \mathcal{H} mit $L^2(X, m)$ identifizieren. Unter dieser Identifikation geht $D(Q)$ ueber in

$$\tilde{U}D(Q) = UD(Q) = L^2(X, m') = \{f \in L^2(X, m) : \int h|f|^2 dm < \infty\}.$$

(Hier folgt die letzte Gleichung durch direktes Nachrechnen unter Verwenden der Definition von m .)

Ohne Einschraenkung koennen wir also setzen: $\mathcal{H} = L^2(X, m)$, $D(Q) = \{f \in L^2(X, m) : \int h|f|^2 dm < \infty\}$ und $Q(f, g) = \int fgh dm$. Definiert man nun H als den Operator der Multiplikation mit h in $L^2(X, m)$ so folgt (i). \square

Erinnerung/Uebung. Sei $Q : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine symmetrische Bilinearform mit $|Q(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$ fuer alle $u, v \in \mathcal{H}$. Dann gibt es einen selbstadjungierten beschaenkten Operator A mit $\|A\| \leq C$ und $Q(u, v) = \langle Au, v \rangle$.

Bew. Fuer festes $u \in \mathcal{H}$ ist die Abbildung

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}, v \mapsto Q(u, v)$$

linear und beschränkt (durch $C\|u\|$). Nach dem Riesz'schen Lemma gibt es also ein $u' \in \mathcal{H}$ mit $\|u'\| \leq C\|u\|$ und

$$Q(u, v) = \langle u', v \rangle$$

für alle $v \in \mathcal{H}$. Ersetzt man u durch $u + \lambda w$ so folgt aus der Linearität aller beteiligten Abbildungen leicht, dass $(u + \lambda w)' = u' + \lambda w'$. Die Abbildung $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $u \mapsto u'$ ist also linear. Weiterhin gilt $\|Au\| = \|u'\| \leq C\|u\|$, und es folgt $\|A\| \leq C$. Schliesslich gilt

$$\langle Au, v \rangle = Q(u, v) = \overline{Q(v, u)} = \overline{\langle Av, u \rangle} = \langle u, Av \rangle$$

für alle $u, v \in \mathcal{H}$. Daher ist A selbstadjungiert.

Uebung. Zeigen Sie, dass man (ii) auch schwach konvergente Folgen einsetzen kann.

DEFINITION. Eine nichtnegative Form heisst abgeschlossen, wenn sie eine der Bedingungen des vorangehenden Satzes erfüllt.

Bemerkung. Aus dem vorigen Theorem erhält man leicht folgende Charakterisierung von abgeschlossenen Formen: Eine Form ist genau dann abgeschlossen, wenn sie unitär äquivalent zu einer Form der Form Q_V ist. (Denn nach (i) sind abgeschlossene Formen gerade Formen der Form Q_H . Mit dem Spektralsatz folgt die Behauptung. Alternativ wurde die eine Richtung auch beim Beweis von (iii) \implies (i) mitbewiesen und die andere Richtung folgt aus (i).)

Für späteren Nutzen geben wir auch noch folgende Definition.

DEFINITION. Eine nichtnegative Form heisst abschliessbar, wenn sie eine abgeschlossene Fortsetzung besitzt. In diesem Fall heisst die kleinste abgeschlossene Fortsetzung der Abschluss der Form.

Beispiel - gewichteter Graph. Sei X eine abzählbare Menge und $b : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ gegeben mit

- $b(x, y) = b(y, x)$ für alle $(x, y) \in X \times X$.
- $b(x, x) = 0$ für alle $x \in V$
- $\sum_{y \in X} b(x, y) < \infty$ für alle $x \in X$.

Wir nennen dann (X, b) einen gewichteten Graphen. Dann wird durch

$$D(Q) := \left\{ f \in \ell^2(X) : \frac{1}{2} \sum_{x, y} b(x, y) |f(x) - f(y)|^2 < \infty \right\},$$

$$Q(f, g) := \frac{1}{2} \sum_{x, y} b(x, y) (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$$

eine abgeschlossene Form definiert. (! Fatou) Der zugehörige Operator heisst Graphenlaplacoperator (mit Neumann Randbedingung).

(Bew. Die Form ist dicht definiert, da $C_c(V)$ im Definitionsbereich enthalten ist. Offenbar ist die Form symmetrisch und nichtnegative.

Zur Abgeschlossenheit: Sei $u_n \rightarrow u$ in $\ell^2(X)$. Dann gilt $u_n(x) \rightarrow u(x)$ in allen $x \in V$. Damit konvergiert $f_n : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x, y) := b(x, y) |u_n(x) -$

$u_n(y)|^2$, also punktweise gegen $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = b(x, y)|u(x) - u(y)|^2$. Nach dem Lemma von Fatou folgt also

$$Q(u) = \sum_{x,y} b(x, y)|u(x) - u(y)|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{(x,y) \in V \times V} b(x, y) f_n(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q(u_n).$$

Das zeigt Eigenschaft (ii) des Satzes.)

Sei nun Q_c die Einschränkung von Q auf $C_c(X) \times C_c(X)$. Dann ist Q_c abschliessbar (da Q eine abgeschlossene Fortsetzung ist) und der Abschluss von Q_c wird mit Q_0 bezeichnet. Der zugehörige Operator heisst Graphenlaplaceoperator (mit Dirichlet Randbedingung).

Erinnerung - Sobolevraeume. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Seien $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ lokal integrierbar und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^d$. Dann heisst g die schwache α -te Ableitung von f , wenn gilt

$$\int_{\Omega} g \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f \partial^{\alpha} \varphi dx$$

für alle $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$. Der Raum

$$W^{1,2} := \{f \in L^2(\Omega) : \partial^{\alpha} f \in L^2(\Omega), |\alpha| = 1\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{W^{1,2}}^2 := \sum \|\partial^j f\|^2 + \|f\|^2$$

ist ein Banachraum. (Nachrechnen!) Damit ist dann auch

$$W_0^{1,2} := \overline{C_c^{\infty}(\Omega)}^{W^{1,2}}$$

ein Banachraum (da es nach Definition ein vollständiger Unterraum eines Banachraum ist).

Beispiel - Neumann Laplace. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Dann wird durch

$$D(Q_N) := W^{1,2}(\Omega), \quad Q_N(f, g) := \int_{\Omega} \langle \nabla f, \nabla g \rangle dx$$

eine abgeschlossene symmetrische nichtnegative Form definiert. Der zugehörige Operator heisst Neumann Laplace Operator.

Bew. Die Form ist dicht definiert, da $C_c^{\infty}(\Omega)$ im Definitionsbereich enthalten ist. Offenbar ist die Form symmetrisch und nichtnegativ.

Zur Abgeschlossenheit: Die Form ist abgeschlossen, da $\|\cdot\|_Q$ gerade die Sobolevnorm auf $W^{1,2}$ ist (bzgl. derer $W^{1,2}$ ein Banachraum ist).

Beispiel - Dirichlet Laplace. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Dann wird durch

$$D(Q_D) := W_0^{1,2}(\Omega), \quad Q_D(f, g) := \int_{\Omega} \langle \nabla f, \nabla g \rangle dx$$

eine abgeschlossene Form definiert. Der zugehörige Operator heisst Dirichlet Laplace Operator.

Bew. Es ist $W_0^{1,2}$ nach Definition abgeschlossen.

Bemerkung - Q_N versus Q_D : (a) In obigen Beispielen ist offenbar Q_N eine Fortsetzung von Q_D . Das bedeutet allerdings (fast) nichts für die zugehörigen Operatoren. Insbesondere ist der Neumann Laplace Operator keine Fortsetzung des Dirichlet Laplace Operator, wenn Q_N und Q_D verschieden

← Ende der Vorlesung →

sind. (Denn sonst muessten die beiden Operatoren und damit auch die zugehoerigen Formen uebereinstimmen). Das Verhaeltnis der beiden Operatoren zueinander ist kompliziert (vgl. Teil (b) der Bemerkung).

(b) In gewissem Sinne (dessen Praezisierung einige Arbeit macht) besteht der Definitionsbereich des Neumann Laplaceoperator aus Funktionen mit zweiten Ableitungen in L^2 und verschwindender Normalenableitung am Rand und der Definitionsbereich des Dirichlet Laplaceoperator besteht aus Funktionen mit zweiten Ableitungen in L^2 mit verschwindenden Funktionswerten am Rand.

Die beiden vorangehenden Beispiele lassen sich in verschiedene Richtungen verallgemeinern.

Beispiel - Divergenzformoperatoren mit singulaeren Koeffizienten.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Sei

$$a : \Omega \longrightarrow \text{Symmetrische nichtnegative } n \times n \text{ Matrizen}$$

messbar mit

$$0 < c \leq a(x) \leq C$$

fuer alle $x \in \Omega$. Dann wird durch

$$Q(f, g) := \int_{\Omega} \langle a(x) \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle dx$$

auf $W^{1,2}$ bzw. $W_0^{1,2}$ abgeschlossene Formen definiert. Die entsprechenden Operatoren werden als Divergenzformoperator der Form

$$\nabla \cdot a \nabla \text{ mit Neumann Randbedingungen}$$

und

$$\nabla \cdot a \nabla \text{ mit Dirichletrandbedingungen}$$

bezeichnet.

Bew. Nach Voraussetzung an a ist $\|\cdot\|_Q$ aquivalent zur Sobolevnorm. Damit folgt die Abgeschlossenheit. Die uebrigen Aussagen folgen einfach.

Bemerkung. Es ist bemerkenswert, dass im Beispiel - von der Messbarkeit abgesehen - keinerlei Glattheit von den Koeffizienten a gefordert wird. Es genuegen die oberen und unteren Schranken an die Eigenwerte.

Gegenbeispiel. Auch wenn Formen denselben Definitionsbereich haben, kann der Definitionsbereich der zugehoerigen Operatoren sehr verschieden sein. Dazu betrachten wir eine eindimensionalen Spezialfall des vorangehenden Beispiel:

Sei $\Omega = (0, 1)$. Sei $a : (0, 1) \longrightarrow (0, \infty)$ stueckweise stetig diffbar mit $0 < c \leq a(x) \leq C$. Dann ist

$$D(Q_a^N) = W^{1,2}(0, 1)$$

unabhaengig von a . Fuer den zugehoerigen Operator Δ_a^N gilt aber

$$D(\Delta_a^N) = \{f \in W^{1,2}(0, 1) : a \partial f \in W^{1,2}(0, 1)\}$$

$$\Delta_a^N f = \partial(a \partial f).$$

Ein anderes Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$. Sei $j : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ messbar, symmetrisch (i.e. $j(x, y) = j(y, x)$ alle $x, y \in \Omega$) und erfuell $\int |u(x) - u(y)|^2 j(x, y) d(x, y) < \infty$ fuer alle $u \in C_c^1(\Omega)$. Dann ist die Form

$$D(Q^c) = C_c^1(\Omega), \quad Q^c(u, v) := \int (u(x) - u(y)) \overline{(v(x) - v(y))} j(x, y) d(x, y)$$

symmetrisch und abschliessbar.

Bew. Die Form ist dicht definiert, da $C_c^1(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ ist. Da j symmetrisch ist, ist sie symmetrisch. Sie ist abschliessbar, da nach dem ueblichen Fatouargument die Form

$$Q(u) := \int \int |u(x) - u(y)|^2 j(x, y) d(x, y)$$

fuer $u \in L^2(\Omega)$ abgeschlossen ist. (Sei $u_n \rightarrow u$. Zu zeigen $Q(u) \leq \liminf Q(u_n)$). Ohne Einschraenkung $\liminf Q(u_n) = \lim Q(u_n)$. Ohne Einschraenkung $u_n \rightarrow u$ punktweise fast ueberall...)

Bemerkung. Das vorangehende Beispiel steht in gewisser Weise zwischen dem Beispiel des Graphen und dem Beispiel der Divergenzformoperatoren: Wie bei den Divergenzformoperatoren liegt der Euklidische Raum zugrunde. Wie bei den Graphen handelt es sich bei der Form um eine Integral ueber Differenzen (und nicht ueber Ableitungen).

← Ende der Vorlesung →

Der vorangehende Satz (und sein Beweis) geben keine explizite Beschreibung von H mittels Q . Dazu dient das folgende Theorem. Zunaechst eine Vorbereitung.

PROPOSITION ($H = H^{1/2} H^{1/2}$). *Sei H ein nichtnegativer selbstadjungierter Operator. Dann gilt*

$$D(H) = \{f \in D(H^{1/2}) : H^{1/2} f \in D(H^{1/2})\}$$

sowie $H = H^{1/2}(H^{1/2} f)$ fuer $f \in D(H)$.

Beweis. Sei D' die Menge auf der rechten Seite der Formel. Ohne Einschraenkung koennen wir H als Operator der Multiplikation mit dem nichtnegativen V auf einem Massraum (X, m) auffassen. Damit gehoert ein messbares $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ zu $D(H)$ genau dann wenn gilt

$$\int (1 + V^2) |f|^2 dm < \infty.$$

Ein messbares $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ gehoert zu D' genau dann wenn gilt

$$\int (1 + V) |f|^2 dm < \infty$$

und

$$\int V^2 |f|^2 dm < \infty.$$

Damit folgt die Behauptung (da $V \leq 1 + V^2$). □

Bemerkung. Fuer beliebige selbstadjungierte H und messbare Φ und Ψ gilt immer $(\Phi \cdot \Psi)(H) = \overline{\Phi(H)} \Psi(H)$. Allerdings gilt im allgemeinen keine Gleichheit ohne den Abschluss. (Betrachte z.b. auf dem Spektrum von H

unbeschränkte Φ und Ψ mit $\Phi\Psi = 0$. Dann ist $\Phi(H)\Psi(H)$ nicht auf dem ganzen Hilbertraum definiert, aber es ist $(\Phi\Psi)(H) = 0$ auf dem ganzen Hilbertraum definiert.)

THEOREM. *Sei Q eine nichtnegative abgeschlossene Form auf \mathcal{H} . Dann gilt fuer den zugehoerigen Operator H*

$$D(H) = \{f \in D(Q) : \text{es existiert ein } h \in \mathcal{H} \text{ mit } Q(f, g) = \langle h, g \rangle \text{ fuer alle } g \in D(Q)\}$$

$$Hf = h.$$

Beweis. Wir verwenden die schon bewiesene Formel $H = H^{1/2}H^{1/2}$. Sei D' die Menge auf der rechten Seite der behaupteten Formel fuer $D(H)$. Nach Definition von D' gilt dann $f \in D'$ genau dann, wenn $f \in D(H^{1/2})$ und $H^{1/2}f \in D((H^{1/2})^*) = D(H^{1/2})$ gilt und in diesem Fall ist $h = H^{1/2}H^{1/2}f$. Damit folgt die gewuenschte Aussage aus der vorangegangenen Proposition. \square

Bemerkung - Friedrichsfortsetzung. Unter Umstaenden hat man nicht eine abgeschlossene Form, sondern einen symmetrischen Operator S gegeben. Ist dann die Form Q_S mit $D(Q_S) = D(S)$ und $Q_S(f, g) := \langle f, Sg \rangle$ nichtnegativ, so ist sie abschliessbar und der zum Abschluss gehoernde selbstadjungierte Operator ist eine Fortsetzung von S . Er heisst die Friedrichsfortsetzung von S . Wir werden das in dieser Vorlesung nicht verwenden. Darum verzichten wir hier auch darauf, einen Beweis fuer die angegebenen Behauptungen zu liefern und belassen es bei dieser Bemerkung.

Bemerkung/Beispiel. Ein symmetrischer Operator kann verschiedene selbstadjungierte Fortsetzungen haben. So hat

$$\Delta : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

sowohl den Dirichlet Laplaceoperator Δ^D als auch den Neumann Laplaceoperator Δ^N als Fortsetzungen. Diese Fortsetzungen sind im allgemeinen **nicht** ineinander enthalten (sonst muessten sie gleich sein), obwohl fuer die entsprechenden Formbereiche gilt $D(Q_D) \subset D(Q_N)$. Es ist dann Δ^D die Friedrichsfortsetzung von Δ .

3. Halbgruppen und ihre Erzeuger

In diesem Abschnitt diskutieren wir wie nichtnegative selbstadjungierte Operatoren in einer eins zu eins Beziehung zu gewissen Halbgruppen stehen.

DEFINITION (Stark stetige Halbgruppe). *Eine Familie $T_t, t \geq 0$, von stetigen auf ganz \mathcal{H} definierten Operatoren heisst Halbgruppe, wenn gilt*

$$T_t T_s = T_{t+s} \quad (\text{Halbgruppeneigenschaft})$$

fuer alle $t, s \geq 0$. Eine Halbgruppe heisst (stark) stetig, wenn gilt,

$$T_t u \longrightarrow u, t \longrightarrow 0,$$

fuer alle $u \in \mathcal{H}$. Eine Halbgruppe heisst symmetrisch, wenn alle $T_t, t \geq 0$, selbstadjungiert sind. Eine Halbgruppe heisst Kontraktionshalbgruppe, wenn $\|T_t\| \leq 1$ fuer alle $t \geq 0$.

Bemerkungen.

- Ist T_t eine stark stetige Halbgruppe, so gilt $T_0 = I$. Denn:

$$u = \lim_{s \rightarrow 0} T_s u = \lim_{s \rightarrow 0} T_0 T_s u = T_0 \lim_{s \rightarrow 0} T_s u = T_0 u.$$

- In einer Dimension, geht es gerade um Funktionen $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} = L(\mathbb{C})$ mit $F(t+s) = F(t)F(s)$. Aus Analysis I wissen wir, dass jede stetige Lösung dieser Funktionalgleichung gerade die Exponentialfunktion sein muss.

Beispiel - e^{-tA} . Ist $A \geq 0$, so ist $T_t := e^{-tA}$ eine stark stetige, symmetrische Kontraktionshalbgruppe.

Bew. Ohne Einschränkung $A = M_V$ mit $V \geq 0$ auf Hilbertraum $L^2(X, m)$. Nun folgen die Aussagen einfach.

Es ist unser Ziel zu zeigen, dass die Kontraktionshalbgruppen im Beispiel die 'einzigen' symmetrischen Kontraktionshalbgruppen sind. Damit handelt es sich nicht um 'ein' Beispiel sondern um 'das' Beispiel.

Idee. Durch Ableiten gewinnen wir aus einer Halbgruppe einen Operator. Integration dieses Operators liefert dann die Halbgruppe. Die Details verlangen einige Aufmerksamkeit.

PROPOSITION (Generator). Sei $T_t, t \geq 0$, eine stark stetige Halbgruppe auf \mathcal{H} . Dann wird durch

$$D(H) := \{u \in \mathcal{H} : v := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(T_t u - u) \text{ existiert}\}, \quad Hu := v$$

ein linearer Operator definiert.

Beweis. Es ist nicht schwer zu sehen, dass $D(H)$ ein Unterraum und H linear ist. \square

DEFINITION. Der Operator H aus der vorigen Proposition heisst der (infinitesimale) Generator / Erzeuger der Halbgruppe.

Bevor wir nun zu den eigentlichen Untersuchungen kommen noch eine **Vorüberlegung**: In der Definition der starken Stetigkeit und in der Definition des Generators werden Grenzwerte von rechts gebildet. Für $t > 0$ ist man aber im allgemeinen sowohl an links- als auch an rechtsseitigen Grenzwerten interessiert. Die Existenz dieser beiden Grenzwerte folgt automatisch aus der Existenz der rechtsseitigen Grenzwerte und der Halbgruppeneigenschaft:

Um das zu sehen, macht man sich zunächst klar, dass eine stark stetige Halbgruppe $T_t, t \geq 0$, automatisch folgende Beschränktheitseigenschaft hat: Es existiert ein $C > 0$ und ein $\beta > 0$ mit $\|T_t\| \leq C e^{t\beta}$ für alle $t \geq 0$. (Beweis: Es reicht zu zeigen, dass ein $\delta > 0$ existiert mit $\sup\{\|T_t\| : t \in [0, \delta]\} < \infty$. Angenommen nein: Dann existiert eine Folge $t_n \rightarrow 0$ mit $\|T_{t_n}\| \rightarrow \infty$. Weiterhin gilt aber nach starker Stetigkeit $T_{t_n} f \rightarrow f$ für alle $f \in \mathcal{H}$. Damit folgt aus dem Satz von Banach Steinhaus dann $\sup\{\|T_{t_n}\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Das ist ein Widerspruch.)

Nun kann man etwa die starke Stetigkeit in $t > 0$ (d.h. die Stetigkeit von links und von rechts) wie folgt zeigen: Sei $h > 0$. Dann gilt

$$T_{t+h} f - T_t f = T_t (T_h - I) f \rightarrow 0, h \rightarrow 0 + .$$

Dabei verwenden wir im letzten Schritt die Stetigkeit von T_t und die starke Stetigkeit der Halbgruppe.

Ist $h < 0$, so gilt

$$T_{t+h}f - T_t f = T_{t+h}(I - T_{-h})f \rightarrow 0, h \rightarrow 0^- .$$

(Dabei verwenden wir im letzten Schritt die starke Stetigkeit und die eben diskutierte gleichmaessige Beschaenktheit der T_s fuer s aus einem kompakten Intervall.)

Nach dieser Vorbereitung kommen wir nun zu den eigentlichen Schluessen. Wesentliche Teile der Theorie der Halbgruppen beruhen auf den folgenden drei (algebraischen) Identitaeten.

LEMMA (3 Formeln fuer Halbgruppen). *Sei T_t , $t \geq 0$, eine stark stetige Halbgruppe mit Generator H . Dann gilt:*

- (Ableitung der Halbgruppe) *Fuer alle $u \in D(H)$ ist $t \mapsto T_t u$ stark differenzierbar mit $HT_t u = T_t H u = \frac{d}{dt} T_t u$.*
- (Integrierte Form der Ableitung) *Fuer alle $u \in \mathcal{H}$ und $\delta \geq 0$ gilt $\int_0^\delta T_s u ds \in D(H)$ und $T_\delta u - u = H \int_0^\delta T_s u ds$.*
- (Inverse) *Sei $\beta \geq 0$ mit $\|T_t\| \leq e^{t\beta}$ fuer alle $t \geq 0$. Dann gilt fuer alle $u \in \mathcal{H}$ und $\alpha > \beta$, dass $u_\alpha := \int_0^\infty e^{-t\alpha} T_t u dt$ zu $D(H)$ gehoert und $(-H + \alpha)u_\alpha = u$ erfuehrt.*

Beweis. Zum ersten Punkt:

$$\frac{d}{dt} T_t u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T_{t+h} - T_t)u = \lim_{h \rightarrow 0} T_t \frac{1}{h} (T_h - I)u = T_t H u.$$

Im letzten Schritt wird $u \in D(H)$ und die Stetigkeit von T_t genutzt. Die eben gezeigte Existenz des Grenzwert liefert dann auch

$$T_t H u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T_{t+h} - T_t)u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T_h - I)(T_t u).$$

Damit folgt $T_t u \in D(H)$ und $HT_t u = T_t H u$.

Zum zweiten Punkt: Es gilt

$$T_t \int_0^\delta T_s u ds - \int_0^\delta T_s u ds = \int_t^{\delta+t} T_s u ds - \int_0^\delta T_s u ds = \int_\delta^{\delta+t} T_s u ds - \int_0^t T_s u ds.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung (gilt mit ueblichem Beweis auch hier!) gilt aber

$$\frac{1}{t} \int_0^t g(s) ds \rightarrow g(0)$$

fuer jede stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$. Damit koennen wir nun weiter-schliessen:

$$H \int_0^\delta T_s u ds = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(T_t \int_0^\delta T_s u ds - \int_0^\delta T_s u ds \right) = T_\delta u - u.$$

Hierbei folgt aus der Existenz des Grenzwertes auf der rechten Seite auch, dass das Integral auf der linken Seite zum Definitionsbereich von H gehoert.

Zum dritten Punkt: Das ist in gewisser Weise eine Variante des zweiten Punktes. Beachte, dass die Voraussetzungen an α und β sicherstellen, dass das u_α definierende Integral existiert.

$$\begin{aligned}
\text{Differenz}(t) &:= T_t \int_0^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds - \int_0^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds \\
&= e^{t\alpha} \int_t^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds - \int_0^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds \\
&= (e^{t\alpha} - 1) \int_t^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds + \int_t^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds - \int_0^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds \\
&= (e^{t\alpha} - 1) \int_t^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds - \int_0^t e^{-s\alpha} T_s u ds.
\end{aligned}$$

Damit folgt aufgrund der starken Stetigkeit

$$Hu_\alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \text{Differenz}(t) = \alpha u_\alpha - u.$$

Das beendet den Beweis. \square

THEOREM (Halbgruppen und nichtnegative Operatoren). *Sei T_t , $t \geq 0$, eine symmetrische Kontraktionshalbgruppe mit Erzeuger H . Dann ist $-H$ selbstadjungiert und nichtnegativ, und es gilt $T_t = e^{tH}$. Weiterhin ist fuer $u \in D(H)$ die Funktion $w : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}$, $t \mapsto T_t u$ die eindeutige Loesung der Gleichung*

$$\frac{d}{dt} w_t = H w_t, \quad w_0 = u.$$

Bemerkung. Der Satz hat zwei Aussagen: Zum einen entsprechen sich Halbgruppen und nichtnegative Operatoren. Zum anderen sind Halbgruppen als Loesungen der 'Waermeleitungsgleichung' charakterisiert.

Beweis. Wir zeigen eine Reihe von Aussagen.

H ist dicht definiert. Nach dem zweiten Punkt des vorigen Lemma ist jedes Element der Form $\int_0^\delta T_s u ds$ im Definitionsbereich von H . Da T stark stetig ist, sind diese Elemente dicht in \mathcal{H} .

H ist symmetrisch. Die Selbstadjungiertheit der T_t , $t \geq 0$, liefert leicht, dass H symmetrisch ist.

H ist selbstadjungiert. Da es sich um Kontraktionen handelt, kann der dritte Punkt des vorigen Lemma mit $\beta = 0$ und $\alpha > 0$ angewendet werden und liefert zu jedem $u \in \mathcal{H}$ ein u_α mit

$$(-H + \alpha)u_\alpha = u.$$

Damit ist also $-H + \alpha$ surjektiv. Insgesamt folgt, dass $-H$ selbstadjungiert ist.

(Erinnerung: A symmetrisch und $A + \alpha$ surjektiv fuer ein $\alpha \in \mathbb{R}$ impliziert, dass A selbstadjungiert ist: Zu jedem beliebigen $x \in D(A^*)$ existiert aufgrund der Surjektivitaet ein $u \in D(A)$ mit $(A^* + \alpha)x = (A + \alpha)u$. Damit folgt fuer alle $v \in D(A)$

$$\langle x, (A + \alpha)v \rangle = \langle (A^* + \alpha)x, v \rangle = \langle (A + \alpha)u, v \rangle = \langle u, (A + \alpha)v \rangle.$$

Damit folgt (wieder aufgrund der Surjektivitaet von $A + \alpha$) dann $x = u \in D(A)$.

← Ende der Vorlesung →

$-H \geq 0$: Da T_s fuer alle $s \geq 0$ eine Kontraktion ist, gilt fuer alle $u \in D(H)$

$$\langle -Hu, u \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\langle u, u \rangle - \langle T_t u, u \rangle) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\langle u, u \rangle - \langle T_{t/2} u, T_{t/2} u \rangle) \geq 0.$$

Wegen $-H \geq 0$, koennen wir nun definieren $S_t := e^{tH}$. Mit Spektralkuel sieht man leicht, dass S_t eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe mit Erzeuger H ist.

Sei $u \in D(H)$. Ist $w : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}$ eine Loesung von $\frac{d}{dt} w_t = H w_t$, $w_0 = u$, so gilt $w_t = T_t u$. (Beachte: Dass w eine Loesung ist, bedeutet insbesondere dass w stark differenzierbar ist mit $w_t \in D(H)$ fuer alle $t \geq 0$.) Der Fall $t = 0$ ist klar. Sei also $t > 0$. Sei fuer $0 \leq s \leq t$

$$F(s) := T_s w_{t-s}.$$

Dann gilt nach Produktregel (Nachrechnen auf die uebliche Art!) und dem im drei Formeln Lemma bewiesenen ersten Punkt

$$\frac{d}{ds} F(s) = \left(\frac{d}{ds} T_s \right) w_{t-s} + T_s \frac{d}{ds} w_{t-s} = T_s H w_{t-s} - T_s H w_{t-s} = 0.$$

Damit folgt nach dem HDI also

$$F(s) \equiv \text{constant}.$$

Einsetzen von $s = t$ und $s = 0$ liefert dann $T_t u = F(t) = F(0) = w(t)$.

Es gilt $T_t = S_t$ fuer alle $t \geq 0$. Es reicht $T_t u = S_t u$ fuer alle $u \in D(H)$ zu zeigen (da $D(H)$ dicht in \mathcal{H} ist und T_t, S_t stetig). Spektralsatz liefert leicht, dass $w_t = S_t u$ eine Loesung von $\frac{d}{dt} w = H w$, $w(0) = u$, ist. Damit folgt die gewuenscht Gleichheit von $T_t u$ und $S_t u$ aus dem vorangegangenen Schritt.

Zur letzten Aussage: Wie im drei Formeln Lemma bewiesen ist $t \mapsto T_t u$ eine Loesung von $u'_t = H u$, $u_0 = u$. Es bleibt die Eindeutigkeit zu beweisen: Das folgt wieder aus der schon bewiesenen Eindeutigkeitsaussage. \square

Bemerkungen. (a) Ein sehr aehnlicher Beweis funktioniert auch fuer stark stetige Kontraktionshalbgruppen in Banachraeumem. Das ist als Theorem von Hille / Yoshida bekannt.

(b) Die starkte Stetigkeit kann auch durch schwache Messbarkeit ersetzt werden (die dann die starke Stetigkeit impliziert). Ohne eine 'Glattheitsvoraussetzung' ist die Aussage schon in einer Dimension falsch.

Die bisherigen Betrachtungen zeigen, wie Halbgruppen und nichtnegative Operatoren zusammenhaengen. Wir geben nun noch an, wie man aus einer Halbgruppe die Form des Operators direkt gewinnen kann. (Dass man das ueberhaupt kann, folgt natuerlich schon aus dem vorigen Theorem.)

LEMMA (Halbgruppe \rightarrow Form). Sei $T_t, t \geq 0$, eine symmetrische stark stetige Kontraktionshalbgruppe mit Erzeuger H (d.h. $T_t = e^{tH}$). Sei Q die zugehoerige Form (d.h. Q gehoert zu $-H!$). Sei fuer $t > 0$, Q_t definiert durch

$$D(Q_t) := \mathcal{H}, \quad Q_t(u, v) := \frac{1}{t} \langle (I - T_t)u, v \rangle.$$

Dann ist Q_t eine nichtnegative Form, es ist $Q_t(u)$ strikt wachsend fuer $t \rightarrow 0$ fuer jedes $u \in \mathcal{H}$, und es gilt

$$D(Q) = \{u \in \mathcal{H} : \lim_{t \rightarrow 0} Q_t(u, u) < \infty\}$$

$$Q(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} Q_t(u, v).$$

Beweis. Ohne Einschraenkung sei $\mathcal{H} = L^2(X, m)$ und $-H = M_V$ mit $V \geq 0$. Dann ist

$$Q_t(u, v) = \frac{1}{t} \int (1 - e^{-tV(x)}) u(x) \overline{v(x)} dm(x).$$

Damit folgen die Aussagen einfach. Denn es konvergiert $\frac{1-e^{-at}}{t}$ nichtfallend gegen ae^{-at} . (Nichtfallend: Berechne die Ableitung oder betrachte als Mittel...) (Uebung) \square

4. Resolventen

Wie Halbgruppen so stehen auch (gewisse) Resolventen in einer eins zu eins Beziehung zu nichtnegativen Operatoren. Anders als bei Halbgruppen reicht jedoch schon die Kenntnis einer einzelnen Resolvente, um den gesamten Operator festzulegen. Das diskutieren wir in diesem Abschnitt.

DEFINITION (Resolvente). Eine Familie G_α , $\alpha > 0$, von auf ganz \mathcal{H} definierten Operatoren auf \mathcal{H} heisst Resolvente, wenn gilt

$$G_\alpha - G_\beta = -(\alpha - \beta)G_\alpha G_\beta. \quad (\text{Resolventengleichung})$$

Eine Resolvente heisst stark stetig, wenn gilt $\alpha G_\alpha u \rightarrow u$, $\alpha \rightarrow \infty$, fuer jedes $u \in \mathcal{H}$. Eine Resolvente heisst symmetrisch, wenn jedes G_α , $\alpha > 0$, selbstadjungiert ist. Eine Resolvente heisst Kontraktion wenn gilt $\|\alpha G_\alpha\| \leq 1$ fuer alle $\alpha > 0$.

Bemerkung. In manchen Zusammenhaengen ist es sinnvoll den Operator αG_α als das primare Objekt aufzufassen (und nicht G_α).

FOLGERUNG. Sei G_α , $\alpha > 0$, eine Resolvente. Dann gilt:

- (a) $G_\alpha G_\beta = G_\beta G_\alpha$
- (b) $\text{Range}(G_\beta) \subset \text{Range}(G_\alpha)$, also $\text{Range}(G_\alpha) = \text{Range}(G_\beta)$ fuer alle $\alpha, \beta > 0$.
- (c) Handelt es sich zusaetzlich noch um Kontraktionen, so folgt $G_\alpha u \rightarrow G_\beta u$ fuer $\alpha \rightarrow \beta$.

Beweis. (a) Das folgt sofort aus der Resolventengleichung (angewendet auf α, β und mit α und β vertauscht).

(b) Die erste Aussage folgt direkt aus der Resolventengleichung. Die zweite Aussage folgt dann nach Vertauschen von α und β .

(c) Das folgt sofort aus der Resolventengleichung. \square

Notation. Wir betrachten ausschliesslich Resolventen, die symmetrisch und Kontraktionen sind. Daher wird das nicht immer erwahnt.

Beispiel. Sei $L \geq 0$. Dann ist $G_\alpha := (L + \alpha)^{-1}$ eine symmetrische stark stetige Kontraktionsresolvente.

Bew. Ohne Einschränkung ist $L = M_V$ mit $V \geq 0$ auf $L^2(X, m)$. Nun folgen die Aussagen einfach.

Wir wollen zeigen, dass die im Beispiel gegebenen die 'einzigen' Resolventen sind.

PROPOSITION (Erzeuger einer Resolvente). Sei $G_\alpha, \alpha > 0$, eine stark stetige Resolvente. Dann ist G_α invertierbar fuer alle $\alpha > 0$ und der Operator H mit

$$D(H) = \text{Range}(G_\alpha) \quad Hu = -G_\alpha^{-1}u + \alpha u$$

haengt nicht von $\alpha > 0$ ab.

Beweis. G_α ist injektiv: Sei $G_\alpha u = 0$. Dann folgt aus der Resolventengleichung, dass $G_\beta u = 0$ fuer alle $\beta > 0$. Damit folgt aus der starken Stetigkeit, dass $u = \lim \alpha G_\alpha u = 0$.

Nach der Resolventengleichung haengt $\text{Range}(G_\alpha)$ nicht von $\alpha > 0$ ab. Ebenso folgt aus der Resolventengleichung, dass H nicht von $\alpha > 0$ abhaengt. \square

←
Ende der Vorlesung

THEOREM (Erzeuger einer Resolvente). Sei $G_\alpha, \alpha > 0$, eine stark stetige symmetrische Kontraktions Resolvente und H der zugehoerige Erzeuger. Dann ist $-H$ ein nichtnegativer selbstadjungierter Operator und es gilt $G_\alpha = (-H + \alpha)^{-1}$.

Beweis. H ist selbstadjungiert.

Da G_α symmetrisch und auf dem ganzen Raum definiert ist, ist sein Inverser ein selbstadjungierter Operator und das gilt dann auch fuer $H = -G_\alpha^{-1} + \alpha$. (Erinnerung: G_α symmetrisch impliziert H symmetrisch. Da $H - \alpha$ surjektiv ist folgt H selbstadjungiert. s.o. fuer aehnlichen Schluss.)

H ist nichtnegativ. Die Funktion $f(\alpha) := \langle u, G_\alpha u \rangle$ erfuehlt nach der Resolventengleichung

$$f'(\alpha) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{1}{\beta - \alpha} \langle (G_\beta - G_\alpha)u, u \rangle = -\langle G_\alpha u, G_\alpha u \rangle \leq 0$$

sowie (nach der starken Stetigkeit) $f(\alpha) \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \infty$. Damit gilt also $f(\alpha) \geq 0$ fuer alle $\alpha \geq 0$. Das liefert dann also

$$\langle -Hu, u \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \langle (-H + \alpha)u, u \rangle = \lim_{\alpha} \langle v_\alpha, G_\alpha v_\alpha \rangle \geq 0$$

mit $v_\alpha = (H + \alpha)u$.

$G_\alpha = (-H + \alpha)^{-1}$. Nach Definition gilt $-H + \alpha = G_\alpha^{-1}$. Damit folgt die Aussage durch Bilden des Inversen. \square

←
Ende der Vorlesung

THEOREM (Charakterisierung der Resolvente als Minimierer). Sei $H \geq 0$ in \mathcal{H} und Q die zugehoerige Form. Seien $\alpha > 0$ und $u \in \mathcal{H}$ beliebig. Sei das Funktional ψ definiert durch

$$\psi : D(Q) \rightarrow [0, \infty), \psi(v) = Q(v) + \alpha \|v - \frac{u}{\alpha}\|^2.$$

Dann gilt

$$\psi(v) = \psi(H + \alpha)^{-1}u + Q((H + \alpha)^{-1}u - v) + \alpha\|(H + \alpha)^{-1}u - v\|^2.$$

Insbesondere ist $(H + \alpha)^{-1}u$ der eindeutige Minimierer des Funktionals ψ .

Beweis. Es reicht die Formel fuer ψ zu beweisen. Sei $G_\alpha := (H + \alpha)^{-1}$ und

$$Q_\alpha(u, v) := Q(u, v) + \alpha\langle u, v \rangle.$$

Dann ist die rechte Seite A der behaupteten Formel gerade gegeben durch

$$A = \psi(G_\alpha u) + Q_\alpha(G_\alpha u - v).$$

Es gilt (offenbar)

$$Q_\alpha(G_\alpha u, v) = \langle u, v \rangle (*)$$

und damit auch

$$Q_\alpha(G_\alpha u, G_\alpha u) = \langle u, G_\alpha u \rangle (**)$$

sowie (direkte Rechnung)

$$\psi(v) = Q_\alpha(v) - \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle + \frac{1}{\alpha}\|u\|^2. (***)$$

Damit koennen wir nun die beiden Terme in A berechnen.

Es folgt mit (***) und (**)

$$\begin{aligned} \psi(G_\alpha u) &= Q_\alpha(G_\alpha u) - \langle G_\alpha u, u \rangle - \langle u, G_\alpha u \rangle + \frac{1}{\alpha}\|u\|^2 \\ &= \langle u, G_\alpha u \rangle - \langle G_\alpha u, u \rangle - \langle u, G_\alpha u \rangle + \frac{1}{\alpha}\|u\|^2 \\ &= -\langle G_\alpha, u \rangle + \frac{1}{\alpha}\|u\|^2 \end{aligned}$$

sowie mit (**)

$$\begin{aligned} Q_\alpha(G_\alpha u - v) &= Q_\alpha(G_\alpha u, G_\alpha u) - Q_\alpha(G_\alpha u, v) - Q_\alpha(v, G_\alpha) + Q_\alpha(v) \\ &= \langle u, G_\alpha u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + Q_\alpha(v). \end{aligned}$$

Damit koennen wir nun den gesuchten Ausdruck

$$A = \psi(G_\alpha u) + Q_\alpha(G_\alpha u - v)$$

berechnen und erhalten

$$A = Q_\alpha(v) - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \frac{1}{\alpha}\|u\|^2 = \psi(v).$$

Dabei haben wir (***) in der letzten Gleichung benutzt. \square

Geometrische Deutung. Sei $u \in \mathcal{H}$ gegeben. Es ist $v = G_\alpha u$ equivalent zu $(H + \alpha)v = u$, was wiederum aequivalent ist zu $v \in D(Q)$ mit $Q_\alpha(v, w) = \langle (u, w) \rangle$ fuer alle $w \in D(Q)$. Das laesst sich aber auch schreiben als

$$Q(v, w) + \alpha\langle v - \frac{1}{\alpha}u, w \rangle = 0 \text{ fuer alle } w \in D(Q).$$

Fuehren wir nun (Trick !) auf $D(Q) \times D(Q)$ das Skalarprodukt

$$\langle (a, b), (c, d) \rangle^* := Q(a, c) + \alpha\langle b, d \rangle$$

ein, so gilt also $v = G_\alpha u$ genau dann wenn

$$(v, v - \frac{1}{\alpha}u) = (v, v) - (0, 1/\alpha u) \perp U,$$

wobei U der Unterraum $U := \{(w, w) : w \in D(Q)\}$ ist. Wegen $(v, v) \in U$ handelt es sich dabei aber um das Problem (Zeichnung !) das bzgl $\|\cdot\|^*$ kleinste Element von $(0, 1/\alpha u) + U$ zu finden.

Bemerkung. Variationsrechnung.

← Ende der Vorlesung →

Bemerkungen. (a) Fuer $\alpha = 1$ erhaelt man $v = (H+1)^{-1} \iff v$ minimiert $\psi(v) = Q(v) + \|v - u\|^2$.

(b) Es gilt $Q_\alpha((H+\alpha)^{-1}u, v) = \langle u, v \rangle$. Mit $J : (D(Q), Q_\alpha) \rightarrow \mathcal{H}$ folgt dann also

$$\langle f, Jg \rangle = Q_\alpha(J^*f, g)$$

fuer alle $f \in \mathcal{H}$ und $g \in D(Q)$.

Auch mittels der Resolventen laesst sich die Form darstellen.

LEMMA (Resolvente \rightarrow Form). Sei G_α , $\alpha > 0$, symmetrische Kontraktionsresolvente mit Erzeuger H . Sei Q die zu $-H$ gehoerige Form. Auf \mathcal{H} sei fuer $\beta > 0$ die Form Q^β definiert durch

$$Q^\beta(u, v) := \beta \langle u - \beta G_\beta u, v \rangle.$$

Dann ist $Q^\beta(u)$ fuer jedes u nicht fallend fuer $\beta \rightarrow \infty$ und es gilt

$$D(Q) = \{u \in \mathcal{H} : \lim_{\beta \rightarrow \infty} Q^\beta(u) < \infty\}$$

sowie

$$Q(u, v) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} Q^\beta(u, v).$$

Beweis. Ohne Einschraenkung sei $\mathcal{H} = L^2(X, m)$ und $-H = M_f$ mit $f \geq 0$. Dann ist

$$Q^\beta(u, v) = \int \beta \left(1 - \frac{\beta}{\beta + f(x)}\right) u(x) \overline{v(x)} dm(x).$$

Mit

$$\beta \left(1 - \frac{\beta}{f + \beta}\right) = \frac{f}{1 + \frac{f}{\beta}}$$

folgen die Aussagen einfach. (Uebung) □

5. Der magische Tetraeder oder, wie alles zusammenhaengt

In diesem Abschnitt buendeln wir unsere Kenntnisse ueber nichtnegative Operatoren, nichtnegative Formen, Halbgruppen und Resolventen. Die grundsatzliche Philosophie ist, dass diese Objekte alle aequivalent sind und fuer den taeglichen Gebrauch folgendes gilt:

- Formen sind einfacher als Operatoren (Ihr Definitionsbereich ist groesser und meist explizit bekannt im Unterschied zum Definitionsbereich des Operators).
- Halbgruppen und Resolventen sind einfacher als Formen (Beschraenkte Operatoren. Definitionsbereich ist noch groesser.)
- Halbgruppen und Resolventen sind im wesentlichen 'gleich einfach'. Allerdings haben Resolventen den Vorteil, dass man nur eine kennen muss, um den Operator zu gewinnen.

THEOREM. ($T_t \dashrightarrow G_\alpha$) Sei T_t eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe mit Erzeuger $-H$ (d.h. $T_t = e^{-tH}$, $H \geq 0$.) Dann gilt fuer alle $\alpha > 0$

$$(H + \alpha)^{-1} = \int_0^\infty e^{-t\alpha} e^{-tH} dt.$$

Bemerkung - Definition des Integrals. Es gibt verschiedene Seiten das Integral auf der rechten Seite zu definieren. Eine Moeglichkeit ist folgende: Fuer jedes $u \in \mathcal{H}$ ist die Funktion $[0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}$, $t \mapsto e^{-t\alpha} e^{-tH} u$, stetig und faellt sehr schnell. Damit kann man wie bei der Definition des Riemann Integrals vorgehen. Dann gilt (wie man sich leicht klarmacht):

$$\left\langle \int_0^\infty e^{-t\alpha} e^{-tH} u dt, g \right\rangle = \int_0^\infty \langle e^{-t\alpha} e^{-tH} u, g \rangle dt$$

fuer alle $g \in \mathcal{H}$. (Tatsaechlich koennte man auch die letzte Formel zur Definition des Integrals machen. Evtl. Details.)

Beweis. Wir muessen zeigen

$$(H + \alpha)^{-1} f = \int_0^\infty e^{-t\alpha} e^{-tH} f dt$$

fuer alle $f \in \mathcal{H}$. Dazu reicht es zu zeigen,

$$\langle (H + \alpha)^{-1} f, g \rangle = \int_0^\infty e^{-t\alpha} \langle e^{-tH} f, g \rangle dt$$

fuer alle $f, g \in \mathcal{H}$. Dazu reicht es nach Polarisation zu zeigen

$$\langle (H + \alpha)^{-1} f, f \rangle = \int_0^\infty e^{-t\alpha} \langle e^{-tH} f, f \rangle dt.$$

Nach Spektralkalkuel gibt es zu jedem $f \in \mathcal{H}$ ein Mass μ_f auf $[0, \infty)$ mit

$$\int_0^\infty F(s) d\mu_f(s) = \langle F(H) f, f \rangle.$$

Damit erhaelt man

$$\begin{aligned} RS &= \int_0^\infty e^{-t\alpha} \int_0^\infty e^{-ts} d\mu_f(s) dt \\ \text{Fubini} &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(\alpha+s)} dt d\mu_f(s) \\ (\text{Ausrechnen}) &= \int_0^\infty \frac{1}{\alpha+s} d\mu_f(s) \\ &= \langle (H + \alpha)^{-1} f, f \rangle. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

THEOREM ($G_\alpha \dashrightarrow T_t$). Sei $H \geq 0$ und $G_\alpha = (H + \alpha)^{-1}$ fuer $\alpha > 0$. Dann gilt

$$e^{-tH} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{t} \right)^n G_{\frac{n}{t}}^n f.$$

Beweis. Setze $R_n := \frac{n}{t} G_{\frac{n}{t}}^n f$. Wir betrachten die Differenz und nuetzen Spektralkalkuel. Das fuehrt auf

$$D_n := \|e^{-tH} f - R_n\|^2 = \int_0^\infty \left| e^{-ts} - \left(\frac{n}{t} \right)^n \frac{1}{\frac{n}{t} + s} \right|^2 d\mu_f(s).$$

Mit $\left(\frac{\frac{n}{t}}{\frac{n}{t}+s}\right)^n = \left(1 + \frac{ts}{n}\right)^{-n}$ vereinfacht sich dies zu

$$D_n = \int_0^\infty |e^{-ts} - \left(1 + \frac{ts}{n}\right)^{-n}|^2 d\mu_f(s).$$

Der Integrand geht dabei punktweise gegen 0 (Analysis I) und ist beschränkt durch $1 + 1 = 2$. Damit folgt nach dem Satz von Lebesgue $D_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. \square

Bemerkung. Im allgemeinen hat man keine gleichmäßige Konvergenz der Integranden bzgl. der supremum norm. Daher liefert die Aussage des Theorem nur eine starke Konvergenz der Resolventen und keine Normkonvergenz.

Zusammenfassung $H \geq 0$. Tetraeder malen.

- (1) $Q \rightarrow H: D(H) = \{f \in D(Q) : \text{ex. } g \in \mathcal{H} \ Q(f, g) = \langle g, h \rangle \text{ fuer alle } h \in D(Q)\}$. $Hf = g$.
 $H \rightarrow Q: D(Q) = D(H^{1/2})$, $Q(f, g) = \langle H^{1/2}f, H^{1/2}g \rangle$.
- (2) $H \rightarrow T: T_t := e^{-tH}$.
 $T \rightarrow H: D(H) = \{f \in \mathcal{H} : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(T_t - I)f \text{ ex.}\}$. $Hf = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(T_t - I)f$.
- (3) $H \rightarrow G: G_\alpha = (H + \alpha)^{-1}$.
 $G \rightarrow H: H = G_\alpha^{-1} - \alpha$.
- (4) $T \rightarrow G: G_\alpha = \int_0^\infty e^{-t\alpha} T_t dt$.
 $G \rightarrow T: T_t = s - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{t} G_{\frac{n}{t}}\right)^n$.
- (5) $T \rightarrow Q: D(Q) = \{u : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle (I - T_t)u, u \rangle < \infty\}$, $Q(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle (I - T_t)u, v \rangle$.
 $Q \rightarrow T: Q \rightarrow H$ und dann $H \rightarrow T_t$.
- (6) $G \rightarrow Q: D(Q) = \{u : \lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta \langle u - \beta G_\beta u, u \rangle < \infty\}$, $Q(u, v) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta \langle u - \beta G_\beta u, v \rangle$.
 $Q \rightarrow G: G_\alpha f = u$ ist eindeutiges Element mit $Q_\alpha(u, v) = \langle f, v \rangle$ fuer alle $v \in D(Q)$.

Bemerkung. Gilt $H \geq c > 0$, so existiert G_α fuer alle $\alpha > -c$. Entsprechend bleiben Resolventenformeln und Berechnung der Resolvente mittels $e^{-t\alpha}$ gueltig. (Ersetzte z.B. H durch $H - c$ in den obigen Formeln etc.)

KAPITEL 2

Markovhalbgruppen und Dirichletformen

In diesem Abschnitt wird es um Formen und Halbgruppen gehen, die noch weitere Positivitaetseigenschaften haben. Wir setzen wir voraus, dass ein Massraum (X, B, m) gegeben ist und betrachten dann

$$\mathcal{H} := L^2(X, m).$$

Damit gibt es einen Begriff von positiven Funktionen und eine entsprechende Ordnung. Es wird um Halbgruppen gehen, die in zweierlei Weise gut mit dieser Ordnung vertraeglich sind.

Bei den Betrachtungen handelt es sich zutiefst um reelle Phaenomene. Entsprechend wird der Raum

$$L_{\mathbb{R}}^2 := L_{\mathbb{R}}^2(X, m) := \{f \in L^2(X, m) : \Im f = 0\}$$

eine Rolle spielen. Wenn wir das im komplexen Hilbertraum $L^2(X, m)$ untersuchen wollen, brauchen wir noch eine weitere Bedingung der Reellitaet. Damit beginnen wir dieses Kapitel.

1. Reelle Operatoren

Dirichletformen leben in gewisser Weise auf reellen Hilbertraumen. Tatsaechlich werden sie auch oft nur fuer solche Raeume definiert. Bei Betrachtung von komplexen Hilbertraeumen spielt dann eine zusaetzliches Erforderniss eine Rolle. Darum geht es in diesem Abschnitt.

DEFINITION. *Ein Operator H auf \mathcal{H} heisst reell, wenn gilt*

- $f \in D(H)$ impliziert $\bar{f} \in D(H)$ (also $f \in D(H) \iff \bar{f} \in D(H)$);
- $H\bar{f} = \overline{Hf}$.

Eine Form Q heisst reell, wenn gilt

- $f \in D(Q)$ impliziert $\bar{f} \in D(Q)$ (also $f \in D(Q) \iff \bar{f} \in D(Q)$).
- $Q(f, g) \in \mathbb{R}$ fuer alle $f, g \in D(Q) \cap L_{\mathbb{R}}^2(X, m)$.

Bemerkung. (a) Fuer reelle Operatoren / Formen gehoeren mit f immer auch $\Im f$ und $\Re f$ zum Definitionsbereich.

(b) Sind T, S beschraenkt und reell, so ist auch TS beschraenkt und reell.

PROPOSITION. *Sei $H \geq 0$ und Q die zugehoerige Form. Dann sind aequivalent:*

- (i) H reell.
- (i') $H\Re f = \Re Hf$
- (ii) Q reell.
- (iii) $(H + \alpha)^{-1}$ reell fuer alle $\alpha > 0$.
- (iv) e^{-tH} reell fuer alle $t > 0$.

Beweis. Die Aequivalenz von (i) und (i') ist klar.

←
Ende der Vorlesung

(i) \implies (ii): Sei $u \in D(Q)$ beliebig. Dann existiert eine Folge (u_n) in $D(H)$ mit $u_n \rightarrow u$ bzgl. $\|\cdot\|_Q$. Insbesondere ist (u_n) also eine Cauchy Folge bzgl. $\|\cdot\|_Q$ und konvergiert in L^2 gegen u . Da H reell ist gilt (kleine Rechnung)

$$\|u_n - u_m\|_Q^2 = \langle H(u_n - u_m), (u_n - u_m) \rangle + \|u_n - u_m\|^2 = \|\Re(u_n - u_m)\|_Q^2 + \|\Im(u_n - u_m)\|_Q^2.$$

Damit sind dann $(\Re u_n)$, und $(\Im u_n)$ Cauchy Folgen bzgl. $\|\cdot\|_Q$ und haben daher einen Grenzwert in $D(Q)$ (Form ist abgeschlossen). Da sie in L^2 konvergieren, folgt also Konvergenz von $\Re u_n$ gegen $\Re u$ und $(\Im u_n)$ gegen $\Im u$ bzgl. $D(Q)$. Damit folgt (ii).

(ii) \implies (i): Sei $f \in D(H)$. Dann gilt also $f \in D(Q)$ und damit nach (ii) und einer kurzen Rechnung fuer alle $g \in L^2_{\mathbb{R}} \cap D(Q)$

$$Q(\bar{f}, g) = \overline{Q(f, g)} = \overline{\langle Hf, g \rangle} = \langle \overline{Hf}, g \rangle.$$

Damit gilt dann

$$Q(\bar{f}, g) = \langle \overline{Hf}, g \rangle$$

fuer alle $g \in D(Q)$ und es folgt $\bar{f} \in D(H)$ mit $H\bar{f} = \overline{Hf}$.

(i) \implies (iii): Sei $v := (H + \alpha)^{-1}u$. Dann gilt also $u = (H + \alpha)v$ und damit

$$\bar{u} = \overline{(H + \alpha)v} = (H + \alpha)\bar{v}.$$

Das liefert (iii) nach Anwenden von $(H + \alpha)^{-1}$ auf beiden Seiten.

(iii) \implies (iv): Das folgt aus $e^{-tH}f = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{t}{n}(H + \frac{n}{t})^{-n}$.

(iv) \implies (i): Das folgt, da H die 'Ableitung' von e^{-tH} ist:

$$\overline{Hf} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \overline{(I - T_t)f} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (I - T_t)\bar{f} = H\bar{f}.$$

Hier verwendet man (iv) in der vorletzten Gleichung. In der letzte Gleichung nutzt man die Existenz des Grenzwertes um $\bar{f} \in D(H)$ zu erhalten. \square

Wir untersuchen noch naeher, wann Q reell ist.

PROPOSITION (Charakterisierungen reeller Formen). Sei $Q \geq 0$ mit $D(Q) = \overline{D(Q)}$ und Q reell gegeben. Dann gilt:

- (a) $Q(\bar{u}, \bar{v}) = \overline{Q(u, v)}$ fuer beliebige $u, v \in D(Q)$.
- (b) $Q(\bar{u}, \bar{u}) = Q(u, u)$ fuer beliebige $u \in D(Q)$.
- (c) $Q(u + iv) = Q(u) + Q(v)$ fuer reelle u, v .

Beweis. (a) Zerlegen in Real und Imaginaerteil und Nachrechnen.

(b) Folgt sofort aus (a) da $Q(u, u)$ reell ist.

(c) Das folgt aus der Definition reeller Formen. \square

Beachte. Ist Q reell, so ist die Komplexe Konjugtion also eine Isometrie auf $D(Q)$ mit $\|\cdot\|_Q$.

2. Das erste Beurling/Deny Kriterium und die Kato Ungleichung

In diesem Abschnitt charakterisieren wir Formen von positivitaetserhaltenden Operatoren.

DEFINITION (Positivitaetserhaltend). *Ein beschränkter Operator auf \mathcal{H} heißt positivitaetserhaltend, wenn aus $f \geq 0$ folgt $Tf \geq 0$.*

Notation. Für reellwertige f definieren wir $f_+ := \max\{f, 0\}$ und $f_- := -\min\{f, 0\}$. **Zeichnung.** Dann gilt also $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

LEMMA (Nuetzliches zu positivitaetserhaltenden Operatoren). *Seien T, S, T_n beschränkte Operatoren auf $\mathcal{H} = L^2(X, m)$. Dann gilt:*

- (a) *Es ist T positivitaetserhaltend genau dann wenn gilt $|Tf| \leq T|f|$ für alle $f \in \mathcal{H}$.*
- (b) *Ist T positivitaetserhaltend so ist T auch reell.*
- (c) *Sind T, S beschränkte positivitaetserhaltend Operatoren, so ist auch TS ein beschränkter positivitaetserhaltend Operator.*
- (d) *Sind T_n positivitaetserhaltend und konvergiert T_n stark gegen T , so ist auch T positivitaetserhaltend*

Beweis. (a) Sei $f \geq 0$. Dann gilt $f = |f|$ und damit $Tf = T|f| \geq |Tf| \geq 0$. Umgekehrt, reicht es Funktionen der Form

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j}$$

mit $\alpha_j \in \mathbb{C}$ und $A_j \subset X$ messbar und paarweise disjunkt zu betrachten (da diese Funktionen dicht in \mathcal{H} sind). Für ein solches f gilt

$$\begin{aligned} |Tf| &= \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j T 1_{A_j} \right| \\ (\text{Dreiecksugl.}) &\leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j| |T 1_{A_j}| \\ (T \text{ positivitaetserhaltend}) &= \sum_{j=1}^n |\alpha_j| T 1_{A_j} \\ &= T \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j| 1_{A_j} \right) \\ &= T|f|. \end{aligned}$$

Hier wird in der letzten Gleichung genutzt, dass die A_j paarweise disjunkt sind.

(b) $f \in L^2_{\mathbb{R}}$ kann man zerlegen in $f_+ - f_-$ mit $f_+, f_- \geq 0$. Dann gilt $Tf = Tf_+ - Tf_-$.

(c) Einfach.

(d) Einfach. □

THEOREM (Erstes Beurling/Deny Kriterium). Sei $H \geq 0$ auf $L^2(X, m)$ und Q die assoziierte Form. Dann sind äquivalent:

- (i) Für alle $u \in L^2(X, m)$ gilt $Q(|u|) \leq Q(u)$. (Hier ist der Wert ∞ erlaubt.)
- (i') Es ist Q reell mit $Q(u_+ + u_-) \leq Q(u)$ für alle $u \in L^2_{\mathbb{R}}$.
- (i'') Es ist Q reell mit $Q(u_+) \leq Q(u)$ für alle $u \in L^2_{\mathbb{R}}$.
- (ii) Es ist $(H + \alpha)^{-1}$ positivitätserhaltend für jedes $\alpha > 0$.
- (iii) Es ist e^{-tH} positivitätserhaltend für jedes $t \geq 0$.

Beweis. Sei $Q_\alpha(f) := Q(f) + \alpha\|f\|^2$. Wir beginnen mit einer Zwischenbehauptung.

Zwischenbehauptung (*). Sei $u \in L^2(X, m)$ mit $u \geq 0$ gegeben. Sei $w := (H + \alpha)^{-1}u$. Es gilt $Q_\alpha(w + v) \geq Q_\alpha(w)$ für alle v mit $\Re v \geq 0$ und Gleichheit gilt genau dann wenn $v = 0$.

Beweis: Für $\varphi \in D(H)$ und $\psi \in L^2(X, m)$ gilt

$$Q_\alpha(\varphi + \psi) = Q_\alpha(\varphi) + Q_\alpha(\psi) + 2\Re\langle (H + \alpha)\varphi, \psi \rangle.$$

Wendet man dies an auf $\varphi = w$ und $\psi = v$ mit $\Re v \geq 0$ so erhält man

$$Q_\alpha(w + v) = Q_\alpha(w) + Q_\alpha(v) + 2\Re\langle u, v \rangle \geq Q_\alpha(w) + Q_\alpha(v).$$

Damit folgt (*).

Wir zeigen zunächst die Äquivalenz von (i), (ii) und (iii).

(i) \implies (ii): Zu zeigen: $|w| - w = 0$. Sei nun $v = |w| - w$. Dann gilt $\Re v \geq 0$ sowie

$$Q_\alpha(w) \stackrel{(*)}{\leq} Q_\alpha(w + v) = Q_\alpha(|w|) \stackrel{(i)}{\leq} Q_\alpha(w).$$

Mit (*) folgt dann $v = 0$ und damit $w = |w| \geq 0$.

(ii) \implies (iii): Sei $f \geq 0$. Nach (ii) gilt dann

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{n} (H + \frac{n}{t}) \right)^{-n} f = e^{-tH} f.$$

(iii) \implies (i): Sei $u \in D(Q)$ beliebig. (Für $u \notin D(Q)$ ist die Aussage (i) sowieso wahr.) Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{t}(1 - e^{-tH})|u|, |u| \right\rangle &= \frac{1}{t} \left(\|u\|^2 - \int_X e^{-tH} |u| \cdot |u| dm \right) \\ (iii) &\leq \frac{1}{t} \left(\|u\|^2 - \int_X |e^{-tH} u| \cdot |u| dm \right) \\ (e^{-tH} \geq 0) &\leq \frac{1}{t} \left(\|u\|^2 - \int_X e^{-tH} u \cdot \bar{u} dm \right) \\ &= \frac{1}{t} (1 - e^{-tH})u, u. \end{aligned}$$

Bildet man nun den Grenzwert $t \rightarrow 0$ so folgt

$$Q(|u|) \leq Q(u).$$

(i) \implies (i'): Aufgrund von (i) \implies (iii) ist e^{-tH} positivitaetserhaltend. Insbesondere ist e^{-tH} reell. Damit ist auch Q reell. Weiterhin ist fuer $u \in L^2_{\mathbb{R}}$ offenbar $|u| = u_+ + u_-$ und aus (i) folgt damit die gewuenschte Abschaetzung.

(i') \implies (i''): Fuer $u \in L^2_{\mathbb{R}}$ gilt

$$Q(u_+ + u_-) = Q(u_+) + Q(u_-) + 2Q(u_+, u_-)$$

sowie

$$Q(u_+ - u_-) = Q(u_+) + Q(u_-) - 2Q(u_+, u_-).$$

Damit impliziert die Ungleichung in (i') also

$$Q(u_+, u_-) \leq 0.$$

Also folgt

$$Q(u) = Q(u_+ - u_-) = Q(u_+) + Q(u_-) - 2Q(u_+, u_-) \geq Q(u_+).$$

(i'') \implies (ii) (Wir wissen schon, dass (i) equivalent zu (ii) ist.): Der Beweis ist eine Variante von (i) \implies (ii). Sei also $u \geq 0$ und $w := (H + \alpha)^{-1}u$. Da Q reell ist, ist H reell und damit w eine reelle Funktion. Insbesondere existiert w_+ und $v := w_+ - w = w_-$ erfuehlt $\Re v = v \geq 0$. Wir koennen also (*) anwenden und erhalten

$$Q_{\alpha}(w) \stackrel{(*)}{\leq} Q_{\alpha}(w + v) = Q(w_+) \stackrel{(i'')}{\leq} Q_{\alpha}(w).$$

Damit folgt wieder mit (*), dass $v = 0$ also $w = w_+ \geq 0$. □

Wir kommen nun zu einer ersten Folgerung aus dem Satz.

(Erinnerung: Die Funktion $\operatorname{sgn} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch $\operatorname{sgn} z := \frac{\bar{z}}{|z|}$ fuer $z \neq 0$ und $\operatorname{sgn} z = 0$ fuer $z = 0$.)

THEOREM (Kato Ungleichung). *Sei $H \geq 0$ und Q die assoziierte Form. Es gelte eine der Bedingungen des vorigen Theorem. Dann gilt fuer alle $f \in D(H)$ und alle $u \in D(Q)$ mit $u \geq 0$*

$$Q(|f|, u) \leq \langle \Re(\operatorname{sgn}(f)Hf), u \rangle = \Re \langle \operatorname{sgn} f Hf, u \rangle.$$

Bemerkungen.

- Die Ungleichung kann man fuer reelle f (manchmal) als die Aussage

$$H|f| \leq \operatorname{sgn} f Hf$$

im Sinne von Distributionen interpretieren. Allerdings wird im allgemeinen $|f|$ nicht in $D(H)$ sein auch wenn $f \in D(H)$ wie folgendes Beispiel zeigt: Δ auf \mathbb{R}^n , $Q(u, v) = \int \nabla u \nabla v dx$. Beispiel auf \mathbb{R} : $f = id$. Dann $|f| = |\cdot|$. $\Delta|f| = 2\delta_0$, $\Delta f = 0$.

- Ohne den Realteil hat die Ungleichung im allgemeinen keinen Sinn, da $\overline{f} Hf$ nicht notwendig reell ist. Beispiel: Diskreter Laplace on \mathbb{Z}

$$Hf(x) = 2f(x) - f(x - 1) - f(x + 1)$$

und $f = \delta_0 + i\delta_1$. Dann ist $\overline{f(0)Hf(0)} \notin \mathbb{R}$.

- Die Gueltigkeit der Ungleichung des Theorems ist tatsaechlich aequivalent zu den Bedingungen im ersten Beurling / Deny Kriterium: Setze dazu $u = |f|$ fuer $f \in D(H)$. Dann liefert die Kato Ungleichung

$$Q(|f|) \leq \Re \langle \operatorname{sgn} f H f, |f| \rangle = \Re \langle H f, f \rangle = Q(f).$$

Ist nun $f \in D(Q)$ beliebig, so koennen wir eine Folge (f_n) in $D(H)$ waehlen, die im Sinne von $\|\cdot\|_Q$ gegen f konvergiert. Aufgrund der Abgeschlossenheit / Unterhalbstetigkeit der Form gilt dann

$$Q(|f|) \leq \liminf Q(|f_n|) \leq \liminf Q(f_n) = Q(f).$$

Beweis. Wir schreiben $\frac{\bar{f}}{|f|}$ statt $\operatorname{sgn} f$. (An den Stellen x mit $f(x) = 0$ werden die noetigen Ungleichungen sowieso offensichtlich sein an den anderen Stellen koennen wir diese Ersetzung anwenden.)

Wir beginnen mit einer kleinen Rechnung:

$$(*) \quad \Re \frac{\bar{f}}{|f|} e^{-tH} f \leq \left| \frac{\bar{f}}{|f|} e^{-tH} f \right| \leq |e^{-tH} f| \leq e^{-tH} |f|.$$

Letzter Schritt: e^{-tH} ist p.p.

Wir setzen nun unsere Betrachtungen mit einer kleinen Rechnung fort:

$$\begin{aligned} Q(|f|, u) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle (1 - e^{-tH}) |f|, u \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\langle |f|, u \rangle - \langle e^{-tH} |f|, u \rangle) \\ (*) &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\langle |f|, u \rangle - \Re \langle \frac{\bar{f}}{|f|} e^{-tH} f, u \rangle \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\langle \Re \left(\frac{\bar{f}}{|f|} (f - e^{-tH} f) \right), u \rangle \right) \\ (f \in D(H)) &= \langle \Re \left(\frac{\bar{f}}{|f|} H f \right), u \rangle. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

3. Das zweite Beurling/Deny Kriterium, Dirichletformen und Submarkovsche Halbgruppen

In diesem Abschnitt fuehren wir Dirichlet Formen ein.

DEFINITION. Eine Abbildung $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heisst normale Kontraktion, wenn fuer alle $z, z^* \in \mathbb{C}$ gilt:

- $|\gamma(z) - \gamma(z^*)| \leq |z - z^*|.$
- $|\gamma(z)| \leq |z|$ fuer alle $z \in \mathbb{C}$. (Bei Gueltigkeit der ersten Bedingung aequivaelten zu $\gamma(0) = 0$.)

Beispiele. (mit Zeichnung auf \mathbb{R}). $\gamma(z) = |z|.$

$\gamma(z) = \Re z \wedge 1$. (wedge heisst Minimum.)

Fuer $I = [0, 1]$ $\gamma(z) = \gamma_I(z) =$ der zu z naechste Punkt von I .

DEFINITION. Ein beschränkter Operator T auf $L^2(X, m)$ hat die Markoveigenschaft, wenn gilt

$$0 \leq Tf \leq 1$$

für alle $f \in L^2(X, m)$ mit $0 \leq f \leq 1$.

Bemerkung. Es ist nicht schwer zu sehen, dass ein beschränkter Operator T die Markoveigenschaft hat, genau dann, wenn er positivitätserhaltend und kontrahierend ist. Hier heisst *kontrahierend*, dass gilt $Tf \leq 1$ für alle $f \leq 1$.

THEOREM (Zweites Beurling / Deny Kriterium). Sei $H \geq 0$, Q die zugehörige Form und e^{-tH} . Dann sind äquivalent:

- (i) Es gilt $Q(\gamma u) \leq Q(u)$ für alle $u \in L^2$ und alle normalen Kontraktionen $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
- (i') Es ist Q reell mit $Q(\gamma_1 u) \leq Q(u)$ für alle reellen $u \in L^2$.
- (i'') Es ist Q reell mit $Q(u \wedge 1) \leq Q(u)$ für alle reellen $u \in L^2$.
- (i''') Es gilt $Q(|u|) \leq Q(u)$ für alle u und $Q(u \wedge 1) \leq Q(u)$ für alle $u \geq 0$.
- (ii) Die Resolvente hat die Markoveigenschaft.
- (iii) Die Halbgruppe hat die Markoveigenschaft.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Äquivalenz von (i), (ii) und (iii):

(iii) \implies (i): Der Beweis erfolgt nach zwei Reduktionen:

Es reicht für jedes $t > 0$ die Aussage für Q_t mit $Q_t(u) := \langle (1 - e^{-tH})u, u \rangle$ zu zeigen. (Denn - wie wir schon wissen - gilt $Q(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} Q_t(u)$.)

Es reicht $Q_t(\gamma u) \leq Q_t(u)$ zu zeigen für Funktionen u der Form $u = \sum_{j=1}^N \alpha_j 1_{A_j}$ mit paarweise disjunkten A_j . (Denn solche Funktionen sind dicht.)

Seien nun paarweise disjunkte messbare A_j , $j = 1, \dots, N$, mit endlichem Mass gegeben. Definiere

$$a_{ij} := \langle (1 - e^{-tH})1_{A_i}, 1_{A_j} \rangle.$$

Dann gilt für $u = \sum_{j=1}^N \alpha_j 1_{A_j}$

$$Q_t(\gamma u) = \sum_{i,j} a_{ij} \gamma(\alpha_i) \overline{\gamma(\alpha_j)} \quad Q_t(u) = \sum_{i,j} a_{ij} \alpha_i \overline{\alpha_j}.$$

Mit der auf \mathbb{C}^N definierten Form

$$q(z) := \sum a_{ij} z_i \overline{z_j} = \langle Az, z \rangle_{\mathbb{C}^N}$$

reicht es also zu zeigen

$$q(\gamma z) \leq q(z).$$

Definiert man

$$c_j := a_{jj} + \sum_{i:i \neq j} a_{ij} = \sum_i a_{ij},$$

$$b_{ij} := -a_{ij}, \quad i \neq j$$

← Ende der Vorlesung →

so gilt (!) $c_j \geq 0$ fuer alle j und $b_{ij} \geq 0$ fuer all $i \neq j$. sowie (!!)

$$q(z) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} b_{i,j} (z_i - z_j) \overline{(z_i - z_j)} + \sum_j c_j |z_j|^2.$$

An dieser Darstellung der Form q kann man leicht die gewuenschte Eigenschaft ablesen (da $b_{ij}, c_j \geq 0$.)

Zu !: Fuer $i \neq j$ gilt $b_{ij} = -\langle (1 - e^{-tH})1_{A_i}, 1_{A_j} \rangle = \langle e^{-tH}1_{A_i}, 1_{A_j} \rangle \geq 0$ (da positivitaetserhaltend).

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \sum_i \langle 1_{A_i}, e^{-tH}1_{A_j} \rangle &= \langle 1_{\cup A_i}, e^{-tH}1_{A_j} \rangle \\ &= \int_{\cup A_i} e^{-tH}1_{A_j} dm \\ (\text{positivitaetserhaltend}) &\leq \int e^{-tH}1_{A_j} dm \\ (\text{positivitaetserhaltend}) &= \|e^{-tH}1_{A_j}\|_1 \\ (i) &\leq \|1_{A_j}\|_1 \\ &= \langle 1_{A_j}, 1_{A_j} \rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$0 \leq \langle 1_{A_j}, 1_{A_j} \rangle - \sum_i \langle 1_{A_i}, e^{-tH}1_{A_j} \rangle = a_{jj} + \sum_{i:i \neq j} a_{ij} = c_j.$$

Zu !!: Direkte Rechnung.

$$\begin{aligned} \text{Rechte Seite} &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} b_{i,j} |z_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} b_{i,j} |z_j|^2 - \sum_{i \neq j} b_{i,j} z_i \overline{z_j} + \sum_j a_{jj} |z_j|^2 + \sum_j \left(\sum_{i:i \neq j} a_{ij} \right) |z_j|^2 \\ &= - \sum_{i \neq j} b_{ij} z_i \overline{z_j} + \sum_j a_{jj} |z_j|^2 \\ &= q(z). \end{aligned}$$

Hier nutzten wir $a_{ij} = -b_{ij}$ und die Symmetrie von a, b . Daher bleiben nur der zweite und dritte Term uebrig.

(i) \implies (ii): Wir betrachten den Fall $\alpha = 1$. (Die anderen Faelle koennen aehnlich behandelt werden.) Sei $R := (H + 1)^{-1}$. Sei $0 \leq u \leq 1$. Wir muessen zeigen

$$0 \leq Ru \leq 1.$$

Dazu nutzen wir die Charakterisierung der Resolvente Ru als der eindeutige Minimierer von

$$\psi(v) := Q(v) + \|v - u\|^2.$$

Sei $v^* := \gamma_I(Ru)$. Dann gilt aufgrund von (i)

$$Q(v^*) \leq Q(Ru).$$

Aufgrund von offensichtlichen Eigenschaften der Norm $\|\cdot\|$ gilt weiterhin

$$\|v^* - u\|^2 \leq \|v - u\|^2.$$

Damit folgt also $\psi(v^*) \leq \psi(v)$ und wir erhalten $v = v^*$.

(ii) \implies (iii): Das folgt einfach aus

$$e^{-tH} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{t}\right)^n G_{\frac{n}{t}}^n f.$$

Es bleibt die Äquivalenz von (i), (i'), (i'') und (i''') zu zeigen.

Damit ist der Beweis beendet. \square

DEFINITION (Dirichletform). Eine Form Q auf $L^2(X, m)$ mit $Q \geq 0$ heisst Dirichletform, wenn sie eine der Bedingungen des zweiten Beurling / Deny Kriterium erfüllt.

Bemerkung. Unser Beweis des zweiten Beurling / Deny Kriterium zeigt:

- Ist Q eine Dirichletform mit Erzeuger H , so ist auch Q_t mit $Q_t(u) = \langle (1 - e^{-tH})u, u \rangle$ eine Dirichletform.
- Ist Q eine auf ganz L^2 definierte Dirichletform und sind A_1, \dots, A_n paarweise disjunkte messbare Teilmengen von X mit endlichem Mass, so ist auch

$$q : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$q(\alpha, \beta) := \sum_{i,j=1}^n Q\left(\sum_i \alpha_i 1_{A_i}, \sum_j \beta_j 1_{A_j}\right) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \alpha_i \overline{\beta_j}$$

mit

$$a_{i,j} = \langle Q(1_{A_i}, 1_{A_j}) \rangle$$

eine Dirichletform. (Solche Dirichletformen gehören zu endlichen Graphen (s.u.)).