C^*-Algebren

Wintersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 2

(1) Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra ohne Eins. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_1$ die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Banachalgebra ist mit folgender Eigenschaft:
Zu jeder Einbettung $i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in eine Banachalgebra $\mathcal{B}$ mit Eins, existiert ein eindeutiger Algebrenhomomorphismus $h : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}$, der stetig ist, und

$$h \circ j = i \text{ und } h(0,1) = e_{\mathcal{B}},$$

erfüllt.

(2) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass für alle stetigen, linearen Operatoren $a \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt, dass

$$\|a^*a\| = \|a\|^2.$$

(3) Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra und $\mathcal{I}$ ein maximales Ideal von $\mathcal{A}$.
Zeigen Sie:

$$\mathcal{I} \text{ ist abgeschlossen} \iff \mathcal{I} \text{ ist regulär.}$$

(4) Zeigen Sie, dass jedes eigentliche Ideal $\mathcal{I}$ in $M^{n\times n}(\mathbb{C})$ notwendigerweise trivial ist, d.h. $\mathcal{I} = \{0\}$.