Analysis II

Sommersemester 2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 2 **Abgabe Mittwoch 20.04.2011**

(1) Beweisen Sie die folgenden Mittelwertsätze für Integrale

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und
$$g : [a, b] \to \mathbb{R}$$
integrierbar und von einheitlichem Vorzeichen. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

(b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton und stetig differenzierbar und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann existiert $\xi \in [a, b]$ mit
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

(2) Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion zu f:
$$(a)\ f(x) = x^2\sin(2x) \quad (b)\ f(x) = x^3 e^{-x^2} \quad (c)\ f(x) = \frac{1}{x^4 - 1}.$$
Hinweis: partielle Integration, Substitutionsregel, Partialbruchzerlegung

(3) Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion zu f:
$$(a)\ f(x) = \frac{\sin x\cos^3 x}{1 + \cos^2 x} \quad (b)\ f(x) = \cos^5 x\sqrt{\sin x} \quad (c)\ f(x) = \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}.$$
Hinweis: Finden Sie geeignete Substitutionen

(4) Sei f eine differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ mit $f' > 0$ und einer Stammfunktion F. Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Umkehrfunktion f^{-1}.

b.w.

Zusatzaufgaben

- Beweisen Sie das Integralkriterium für Reihenkonvergenz:
  Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $f : [n_0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int\limits_{n_0}^{\infty} f(t)\, dt < \infty.$$

Viel Erfolg!