Analysis I

Wintersemester 2016/2017 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 3 **Abgabe: 07.11.2016**

(1) Es sei X die Menge aller Menschen. Auf X seien die Relationen

$$V := \{(x, y) \in X \times X \mid x \text{ ist verwandt mit } y\}$$

und

$$F := \{(x, y) \in X \times X \mid x \text{ ist befreundet mit } y\}$$

gegeben. Untersuchen Sie, ob es sich dabei um Äquivalenzrelationen handelt. Was ist V, falls man annimmt, dass alle Menschen von einem gemeinsamen Urahn abstammen?

(2) ('Kurze Induktion' impliziert 'Lange Induktion') Es genüge (N, e, ν) mit $e \in N$ und $\nu : N \to N$ den Peanoaxiomen und es seien A_n, $n \in N$, die eindeutig bestimmten Teilmengen von N, für die gilt $A_e = \{e\}$ und $A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}$. Es seien weiterhin Aussagen $B(n), n \in N$, gegeben. Zeigen Sie, dass $B(n)$ für alle $n \in N$ wahr ist, falls gilt:

- $B(e)$ ist wahr.
- Für alle $n \in N$ ist folgendes erfüllt. Gilt $B(k)$ für alle $k \in A_n$, so folgt, dass $B(\nu(n))$ wahr ist.

(3) (Wohlordnung und Induktionsaxiom) Sei N eine Menge mit einem ausgezeichneten Element $e \in N$ und sei $\nu : N \to N \setminus \{e\}$ eine bijektive Abbildung mit $n \neq \nu(n)$ für alle $n \in N$. Weiterhin sei $\leq$ eine Totalordnung auf N, welche für alle $n \in N$ die Ungleichung $n \leq \nu(n)$ erfüllt. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) $(N, \leq)$ ist wohlgeordnet, das heißt jede nichtleere Teilmenge von N besitzt ein bezüglich $\leq$ kleinstes Element.

(ii) Es erfüllt (N, e, ν) das zweite Peano Axiom.

Hinweis zu (ii) $\Rightarrow$ (i): Seien A_n die in Aufgabe 2 betrachteten Mengen. Für jedes $n \in N$ ist die Menge $A_n \cup \{l \in N \mid \nu(n) \leq l\}$ induktiv (warum?), stimmt also mit N überein. Damit ist $\nu(n)$ ein kleinstes Element von $N \setminus A_n$ (warum?). Zeigen Sie nun, dass eine Teilmenge von N ohne kleinstes Element im Komplement aller A_n liegt. Dies liefert die gewünschte Aussage (warum?).

(4) (Rekursive Definition von Mengen) Es genüge (N, e, ν) den Peano Axiomen. Seien zu jedem $n \in N$ eine Menge X_n und eine Abbildung $F_n : \mathcal{P}(X_n) \to \mathcal{P}(X_{\nu(n)})$ gegeben, welche jeder Teilmenge von X_n eine Teilmenge von $X_{\nu(n)}$ zuordnet. Zeigen Sie, dass es für alle Teilmengen $S \subseteq X_e$ eine eindeutige Familile von Mengen $T_n, n \in N$, gibt, mit $T_e = S$ und $T_{\nu(n)} = F_n(T_n)$ für alle $n \in N$.

Hinweis: Sie können sich an der Konstruktion rekursiv definierter Funktionen orientieren.