Analysis III

Wintersemester 2011/12 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 8 **Abgabe Dienstag 14.12.2011**

(1) (a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit glattem Rand, der durch eine geschlossene stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ gegeben ist, wobei U links von γ liegt. Sei $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $k(x, y) = (-y, x)$. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt $F(U)$ von U gegeben ist durch

$$F(U) = \frac{1}{2} \int_\gamma k d\gamma = \frac{1}{2} \int_a^b \langle k(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt.$$

(b) Deuten Sie die Aussage von (a) geometrisch.

(c) Zeichnen Sie die Zykloide

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t + \cos t, 1 + \sin t)$$

und berechnen Sie die Fläche für eine Periode.

(2) Sei $\mathcal{S}$ der Schwartzraum des $\mathbb{R}^N$ und $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ die Fouriertransformation. Für $a \in \mathbb{R}^N$ definiere $(T_a f)(x) := f(a + x)$ und $(M_a f)(x) := e^{ixa} f(x)$ für $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}^N$. Zeigen Sie für $f \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} FT_a f &= M_a F f, \\ FM_{-a} f &= T_a F f. \end{aligned}$$

(3) (a) Sei $p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ ein Polynom. Zeigen Sie, dass $pf \in \mathcal{S}$ für $f \in \mathcal{S}$.

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ein Multiindex. Zeigen Sie, dass $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}$ für $f \in \mathcal{S}$.

(4) Sei $\delta_n : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$ stetig mit $\int_{\mathbb{R}^N} \delta_n(x) dx = 1$ und $\operatorname{supp} \delta_n \subset (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})^N$, $n \in \mathbb{N}$. Für $u \in C_c(\mathbb{R}^N)$ sei $u * \delta_n$ definiert durch

$$u * \delta_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \delta_n(x - y) u(y) dy.$$

(a) Zeigen Sie $u * \delta_n \in C_c(\mathbb{R}^N)$, $n \geq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge von Funktionen $u * \delta_n$, $n \geq 1$, gleichmäßig gegen u konvergiert.

Zusatzaufgaben

(Z1) Seien $\delta_n : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$, $n \geq 1$, wie in Aufgabe 4. Für ein Riemann-integrierbares $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sei $f * \delta_n$ wie oben definiert durch

$$f * \delta_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \delta_n(x - y) f(y) dy.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f * \delta_n$, $n \geq 1$, stetig ist.

(b) Zeigen Sie $f * \delta_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$, in allen Stetigkeitspunkten x von f.